D. W. Oort / G. H. Meyer

Algemene rekenkunde

PRISMA-COMPENDIA

DE LEEUW

Rekenkunde is een uitermate belangrijke wetenschap, omdat ze de basis vormt voor alle wiskundige wetenschappen. Tellen en de eenvoudige bewerkingen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen zijn voor ons vaak vanzelfsprekend, omdat wij op school getraind zijn in de methoden. Maar dit sommetjes maken geeft nog geen inzicht in de grondslagen. We moeten eerst goed beseffen wat een getal is, en hoe ons getalbegrip kan worden uitgebreid. Pas daarna kunnen we de regels die dit manipuleren met getallen beheersen, goed begrijpen. En dan ontdekken we ook vele boeiende aspecten van het getal, en dringen we aan de hand van de auteurs diep door in dit onvermoed uitgestrekte terrein.
Uitgaande van de natuurlijke getallen worden we, via het getal nul, ingeleid in de gebroken getallen, vervolgens in de negatieve, de rationale en tenslotte de irrationale getallen. Daar tussendoor komen vele zaken aan de orde die nodig zijn voor steeds dieper *inzicht*. Het andere doel: het geven van *overzicht,* wordt bereikt door een systematische behandeling van eigenschappen en bewerkingen. We doorschouwen de rekenkunde dus in twee dimensies: in de breedte en in de diepte. Diverse tabellen completeren dit werk.
Dit compendiumdeel is van groot belang voor allen die onderricht in rekenen geven ter verdieping van inzicht, maar evenzeer voor allen die wiskunde willen studeren of bedrijven. Het vormt namelijk de inleiding tot de algebra, en via deze tot andere wiskundige disciplines.

PRISMA-COMPENDIA

D. W. Oort en G. H. Meijer

ALGEMENE REKENKUNDE

PRISMA-COMPENDIA
HET POCKETBOEK
VOOR STUDIE EN PRAKTIJK

REDACTIERAAD

Mevr. Dr. H. A. van den Berg-Noë
H. Bouwmeester / Dr. P. Brommer
Drs. R. H. Houwink / Dr. H. P. H. Jansen
L. M. Japin / Dr. J. A. Vreeswijk
Ir. J. van Zijll

UTRECHT
PRISMA-BOEKEN
ANTWERPEN

290

D. W. OORT EN G. H. MEIJER

ALGEMENE REKENKUNDE

UTRECHT
PRISMA-BOEKEN
ANTWERPEN

© 1964 by Het Spectrum
Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotocopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.
No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission from the publisher.
Prisma-boeken, Prisma-compendia, Prisma-juniores, Prisma-kinderpockets, Aula-, Marka- en Pictura-boeken worden uitgegeven door Uitgeverij Het Spectrum N.V., Utrecht/Antwerpen.

INHOUD

LIJST VAN GEBRUIKTE SYMBOLEN EN NOTATIES 9

WOORD VOORAF 11

I. NATUURLIJKE GETALLEN
Tellen 13
Optelling van natuurlijke getallen 15
Aftrekking van natuurlijke getallen 18
Vermenigvuldiging van natuurlijke getallen 23
Deling van natuurlijke getallen 27
Verband tussen delen en optellen 32
Niet-opgaande deling 32
Machtsverheffing van natuurlijke getallen 33
Worteltrekking en logaritmeneming 37
Worteltrekking 37
Logaritmeneming 41
Overzicht van de bewerkingen 43
Volgorde van de bewerkingen 44

II. HET GETAL NUL
Definitie van nul 46
Nul als modulus van de optelling 46
Andere bewerkingen met nul 47

III. TALSTELSELS
Het grondtal 49
Het tientallig stelsel 50
Het achttallig en tweetallig stelsel 51
Herleiden van een getal van een *g*-tallig stelsel naar het tientallig stelsel 52
Herleiden van een getal van het tientallig stelsel naar een *g*-tallig stelsel 53
Overgang van schrijfwijze in het *g*-tallig stelsel naar het *h*-tallig stelsel 54

IV. UITVOERING VAN DE BEWERKINGEN
Algoritme van de optelling 56
Algoritme van de aftrekking 58
Algoritme van de vermenigvuldiging 59
Algoritme van de opgaande en niet-opgaande deling 62

Machtsverheffing 65
Algoritme van de worteltrekking 66

V. DEELBAARHEID
Delers 70
Deelbare getallen en priemgetallen 71
Eigenschappen van de deelbaarheid 72
Priemgetallen 75
Priemgetallen van Fermat 77
De zeef van Eratosthenes 77
Ontbinding in priemfactoren 78
Het aantal delers van een getal 80
Het produkt van alle delers van een getal 81
De grootste gemene deler 81
Indicator van n 90
Het kleinste gemene veelvoud 93
Kenmerken van deelbaarheid 97
De delers van g^n 97
De delers van $g^n—1$ 99
De negenproef 100
De delers van g^n+1 103
Periode van resten 105
Onderzoek naar de deelbaarheid door middel van aftrekking 108

VI. BREUKEN
Definitie, soorten, eigenschappen 111
Bewerkingen met breuken 117
Optelling van breuken 117
Aftrekking van breuken 119
Vermenigvuldiging van een breuk met een geheel getal 120
Deling van een breuk door een geheel getal 120
Vermenigvuldiging van een breuk met een breuk 121
Deling van een breuk door een breuk 123
Machtsverheffing van breuken 125
Worteltrekking uit breuken 125
Logaritmeneming van breuken 126
Tiendelige breuken 126
Definitie 126
Bewerkingen met tiendelige breuken 127

Herleiding van een onvereenvoudigbare breuk tot een tiendelige 131
g-delige breuken in het *g*-tallig stelsel 132

VII. RIJEN
Rekenkundige rijen 134
Meetkundige rijen 136
Definitie en formule 136
Oneindig voortlopende meetkundige rijen 137
De middelevenredige 138
De som van de delers van een getal 139
Volkomen getallen 139

VIII. REPETERENDE BREUKEN
Ontstaan 142
Zuiver repeterende breuken 144
Zuiver repeterende breuken in het tientallig stelsel 144
Zuiver repeterende breuken in het *g*-tallig stelsel 146
Gemengd repeterende breuken 148
Eigenschappen van het repetendum 149
Optellen en aftrekken met repeterende breuken 152
Vermenigvuldiging van een repeterende breuk met een geheel getal 154

IX. EVENREDIGHEDEN EN VERHOUDINGEN
Definitie 155
Eigenschappen van verhoudingen 155
Eigenschappen van evenredigheden 156
Kettingbreuken en betrekkingswijzer 161

X. CONGRUENTIES
Inleiding 163
Eigenschappen van congruenties 164
Lineaire congruenties met priemmodulus 166
Lineaire congruenties met deelbare modulus 168
De congruentie van Euler-Fermat 169
Primitieve wortels modulo *m* 171
Primitieve wortels van de congruentie van Fermat 172
Periode van een getal *a* modulo *m* 174
Aantal primitieve wortels 174
Toepassing op repeterende breuken 175
Indices 177
Kwadraatresten 180

XI. NEGATIEVE GETALLEN
Inleiding 183
Getallenparen 184
De absolute waarde van een getal 189

XII. RATIONELE GETALLEN
Inleiding 191
Snede van Dedekind 195

XIII. IRRATIONALE (ONMEETBARE) GETALLEN
Definitie en eigenschappen 198
Bovenste en onderste grens 202

AANHANGSEL I. OVERZICHT VAN DE GETALLEN 204

AANHANGSEL II. VERKORTE ALGORITMEN VAN DE VERMENIGVULDIGING 205

AANHANGSEL III. BENADERDE WAARDEN 209
Nauwkeurigheid, volstrekte en relatieve fout 209
Bewerkingen met benaderde waarden 210

AANHANGSEL IV. PERMUTATIES, VARIATIES EN COMBINATIES 213
Permutaties 213
Variaties 214
Combinaties 216
Toepassingen 218

OVERZICHT VAN EIGENSCHAPPEN EN FORMULES 220

TABELLEN 228
I. Machten van en wortels uit *n* 228
II. Ontbinding in factoren van deelbare getallen t/m 1477 die geen factor 2, 3 of 5 bevatten 230
III. Priemgetallen t/m 4999 232
IV. Aantal repeterende cijfers *A* bij de noemer *n* (grondgetal 10) 234
V. Lijst van priemgetallen met de kleinste primitieve wortel 235
VI. Priemgetallen van Mersenne ($2^m - 1$) 235

BIBLIOGRAFIE 236

REGISTER 236

LIJST VAN GEBRUIKTE SYMBOLEN EN NOTATIES

De getallen tussen haakjes verwijzen naar de betrokken paragraaf.

1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .	rij der natuurlijke getallen (1)
$>$, $<$, $=$, $\neq$	groter dan, kleiner dan, gelijk, ongelijk (3)
$\geqslant$, $\leqslant$	groter dan of gelijk aan, kleiner dan of gelijk aan (80)
$+$	plus-teken (6)
$-$	min-teken (14)
$\times$ of $\cdot$	bewerkingsteken vermenigvuldiging (22)
:	idem deling (31)
a^p	machtsverheffing (44)
a^{b^c}	stapelexponent (51)
$\sqrt[p]{b}$	p-de machtsworteltrekking (52)
${}^a\log b$	logaritme-neming (52-61)
0	nul (68)
g	grondtal talstelsel (71)
$\lceil\quad\rceil$	ilatieteken (71)
$p!$	p-faculteit (91)
G.G.D.	grootste gemene deler (98)
K.G.V.	kleinste gemene veelvoud (113)
$\dfrac{a}{b}$	breuk (131)
$0{,}\not{5}23\not{6}$	zuiver repeterende breuk (165)
$3{,}24\not{7}2\not{5}$	gemengd repeterende breuk (165)
$a : b = c : d$	evenredigheid (174)
$S(n)$	som van de delers van n (162)
$\varphi(n)$	indicator van n (112)
$\prod\limits_{i=1}^{k} a_i$	Π-notatie (112)
$\equiv$	congruent-teken (185)
a^{-1}	reciproke van a (187)
${}^a\text{ind}\, g$	index van g (195)
$\left(\dfrac{a}{p}\right)$	symbool van Legendre (196)

P_n	aantal permutaties van *n* (235)
V_n^p	aantal variaties van *n*, *p* aan *p* (236)
C_n^p	aantal combinaties van *n*, *p* aan *p* (237)
$\sum_{i=1}^{k} a_i$	Σ-notatie (237)
(a,b)	getallenpaar (201)
$\|a\|$	modulus *a* (211)
$a\|A$	snede in het gebied van de meetbare getallen (220)

WOORD VOORAF

Dit boek is, volgens de algemene formule van de Compendium-reeks, geschreven met een drieledig doel: het wil zijn samenvatting, maar daarnaast ook studiewerk en richtingwijzer voor hen die dieper in de stof willen doordringen, en tenslotte ook naslagwerk en hulpbron bij praktische problemen.

Als samenvatting (compendium) van de hoofdzaken der Algemene Rekenkunde is het dienstig voor allen die dit vak op hun leerprogramma hebben staan. Zij vinden hier wat zij nodig hebben.

In de tweede plaats is dit werk gedacht als studieboek voor hen die verder en dieper willen gaan. Ten gerieve van hen zijn enige onderwerpen uitgebreid behandeld, en zijn andere toegevoegd: bijvoorbeeld de uitbreiding van het getalbegrip met behulp van getallenparen.

Voorts waren er diverse onderwerpen die, hoewel minder goed in de strakke opzet passend, toch van grote praktische waarde zijn en die voor vele gebruikers interessant zullen blijken. Deze zijn in de Aanhangsels opgenomen, bijvoorbeeld Benaderde waarden, Verkorte vermenigvuldiging, Permutaties, variaties en combinaties. Ten dienste van de praktijk is ook een aantal tabellen opgenomen, terwijl het Overzicht van de behandelde eigenschappen en formules het naslaan zal vergemakkelijken.

De materie wordt zodanig gepresenteerd, dat ook de gebruiker met weinig wiskundige training de hoofdzaken gemakkelijk kan volgen. Voor de onderwerpen die gericht zijn op uitbreiding en verdieping van de hoofdzaken is uiteraard enige wiskundige routine vereist. De behandeling is met opzet vrij streng gehouden; wij menen dat dit het kritisch inzicht van de gebruiker alleen maar ten goede kan komen.

I. NATUURLIJKE GETALLEN

TELLEN

§1. Er bestaat een rij tekens

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ...

met de volgende eigenschappen:

a. de tekens hebben in deze rij een vaste volgorde;
b. in de rij komen niet twee dezelfde tekens voor;
c. aan ieder teken gaat een ander vooraf, behalve aan het teken 1;
d. op ieder teken volgt een ander; anders gezegd: de rij loopt oneindig voort.

De tekens van deze rij noemt men de *natuurlijke getallen.*

§2. Elk van de natuurlijke getallen geven we een naam, bijvoorbeeld: 1 - een; 2 - twee; 3 - drie; 4 - vier; 5 - vijf; 6 - zes ... Deze namen voldoen aan de eis, dat verschillende tekens verschillende namen hebben.

Het noemen van de rij der natuurlijke getallen heet *tellen.*

§3. Als het natuurlijk getal a bij het tellen eerder genoemd wordt dan het natuurlijk getal b, noemt men a kleiner dan b en tevens b groter dan a. Men schrijft dit als volgt:

$a < b$ (lees: a is kleiner dan b);
$b > a$ (lees: b is groter dan a).

Als a en b hetzelfde getal voorstellen, noemt men a en b gelijk. Men schrijft dit als volgt:

$a = b$ (lees: a is gelijk aan b).

Bij twee getallen a en b geldt één en niet meer dan één der drie betrekkingen:

$a = b, \quad a < b, \quad a > b.$

Als a kleiner is dan b, of als a groter is dan b, noemt men a en b ongelijk. Men schrijft dit als volgt:

$a \neq b$ (lees: a is ongelijk aan b).

Als $c > b$ en $b > a$, betekent dit, dat bij het tellen c na b ge-

noemd wordt, maar tevens dat vóór *b a* al genoemd is, zodat hieruit volgt: $c > a$.

§4. Een groep van gelijksoortige dingen noemt men een *verzameling*. Elk ding noemt men een element van de verzameling.

Voorbeelden van verzamelingen:

een verzameling postzegels;
een serie munten;
de centen uit een bak met munten;
de rij der natuurlijke getallen.

Indien men van twee verzamelingen elk element van de ene toevoegt aan één en niet meer dan één element van de andere verzameling zó, dat bij elk element van laatstgenoemde verzameling één en niet meer dan één element van de eerste behoort, hebben we beide verzamelingen *op elkaar afgebeeld*. We zeggen ook wel, dat tussen beide verzamelingen een *één-één correspondentie* bestaat.

Zo bestaat een één-één correspondentie tussen:

de leerlingen uit een klas en de lijst met namen van leerlingen uit dezelfde klas;
de mannen en vrouwen van een groep echtparen;
de natuurlijke getallen en de namen daarvoor.

§5. Wanneer men van een verzameling (hoeveelheid) de elementen één voor één aanwijst en bij elk element een natuurlijk getal noemt (of aanwijst) zó, dat men de natuurlijke getallen, bij 1 (een) beginnend, in de volgorde van de rij der natuurlijke getallen noemt (aanwijst), *telt men de elementen van een hoeveelheid.*

Hierbij moet men elk element van de verzameling één en niet meer dan één keer aanwijzen.

Er wordt dus een één-één correspondentie gelegd tussen de elementen van de verzameling en de genoemde (aangewezen) getallen.

Het getal, dat bij het tellen met een bepaald element correspondeert, heet het *ranggetal* (*rangnummer*) van dat element.

Het getal, corresponderend met het laatste getal dat wordt aangewezen (aangenomen wordt dus, dat aan het tellen van de hoeveelheid een einde komt), heet het *aantal* (*getal*) der hoeveelheid.

Zonder bewijs volgt hier de *hoofdeigenschap der telling:*

Het aantal elementen van een verzameling is onafhankelijk van de volgorde en de groepering der elementen.

Hieruit volgt, dat het aantal een wezenlijk kenmerk van een verzameling elementen is.

Bij het afbeelden van de ene verzameling op de andere maken we vaak gebruik van de natuurlijke getallen.

Indien bijv. elke leerling uit een klas een boek moet ontvangen kunnen we de leerlingen elk een boek van de voorraad laten wegpakken; we leggen dan rechtstreeks een één-één correspondentie tussen die leerlingen en de boeken die worden uitgeleend.

We kunnen ook, en dat is in de praktijk meestal gemakkelijker, een één-één correspondentie leggen tussen de leerlingen en een groep natuurlijke getallen (we tellen de leerlingen van de klas!) en leggen daarna een één-één correspondentie tussen deze getallen en een verzameling boeken.

We hebben dan een verzameling boeken met een aantal, dat gelijk is aan het aantal leerlingen uit de klas, en kunnen elke leerling een boek geven zonder dat we iets overhouden.

Het aantal boeken, dat we zo hebben verkregen is *nodig* (dat wil zeggen er zijn niet te veel boeken) *en voldoende* (dat wil zeggen er zijn niet te weinig boeken).

OPTELLING VAN NATUURLIJKE GETALLEN

§6. Voegt men een hoeveelheid met a elementen bij een hoeveelheid met b elementen, dan ontstaat een zogenaamde somverzameling.

Het aantal (getal) elementen van de somverzameling stellen we voor door $a + b$, en dit getal heet de *som* van a en b.

Zo is 7 de som van 4 en 3. We gebruiken het woord 'som' hier zowel voor het getal 7 als voor de vorm $4 + 3$.

Definitie: Optellen is de bewerking[1]*, die de som van twee getallen doet vinden.*

1. Een rekenkundige bewerking is een volkomen bepaalde handelwijze, die uit twee getallen één en niet meer dan één getal doet vinden.

Als we bij het optellen van a en b het getal s vinden, kunnen we schrijven:

$$a + b = s.$$

a en b zijn de *termen* van de som.
$a + b$ is de som van a en b; ook is s de som van a en b.

Een kind, dat de som van 3 en 2 moet bepalen, kan de verzameling: drie gestrekte vingers van de linkerhand, voegen bij de verzameling: twee gestrekte vingers van de rechterhand. Tellen van alle gestrekte vingers geeft dan de som: 5.

§7. Een *gedurige som* is de som, die tenslotte ontstaat als men van meer dan twee getallen de som van het eerste en het tweede getal vermeerdert met het derde getal, daarna de verkregen som vermeerdert met het volgende getal, en zo door gaat tot alle getallen opgeteld zijn.

$$\begin{aligned} & a + b + c + d + e = \qquad & 5 + 2 + 4 + 3 + 1 = \\ & = (a + b) + c + d + e = & = 7 + 4 + 3 + 1 = \\ & = \{(a + b) + c\} + d + e = & = 11 + 3 + 1 = \\ & = [\{(a + b) + c\} + d] + e. & = 14 + 1 = 15. \end{aligned}$$

Ook hier zijn a, b, c, d en e termen van de (gedurige) som.

Als geen verwarring mogelijk is, spreken we bij een gedurige som van 'som' zonder meer.

§8. Indien we verzamelingen met respectievelijk a en b elementen samenvoegen, spelen deze verzamelingen een gelijkwaardige rol, zodat we de som $a + b$, maar ook $b + a$ kunnen noemen.

Dit geeft de eigenschap:

Eig.O_1. Een som is onafhankelijk van de volgorde van de termen.
In formule: $a + b = b + a$.

Dit is de *commutatieve eigenschap van de optelling.*

§9. Als we van drie hoeveelheden A, B en C met respectievelijk a, b en c elementen eerst twee hoeveelheden samenvoegen (bijv. B en C) en daarna de somverzameling $(B + C)$ en verzameling A samenvoegen, krijgen we een verzameling met de eigenschappen:

elk element van de laatste verzameling behoort tot één der-

verzamelingen A, B en C en elk element van A, B en C behoort tot de laatst verkregen verzameling.

Dit betekent dat bij de vorming van de verzameling, die we tenslotte hebben verkregen, de verzamelingen A, B en C een gelijkwaardige rol spelen. Hieruit volgt:

Eig.O_2. Een som is onafhankelijk van de groepering van de termen.
In formule: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Dit is de *associatieve eigenschap van de optelling*.

§10. Eigenschappen, als genoemd in § 3, en de eigenschappen O_1 en O_2 noemt men *grondeigenschappen*.

Grondeigenschappen zijn eigenschappen, die kunnen worden bewezen door van de definities van de getallen gebruik te maken.

Eigenschappen, die uit de grondeigenschappen worden afgeleid, zijn *afgeleide eigenschappen*.

Bij het invoeren van een nieuwe getalsoort moet dus de geldigheid van de grondeigenschappen voor de nieuwe getallen worden nagegaan.

§11. Door eigenschap O_2 toe te passen kunnen we aan de associatieve eigenschap van de optelling een uitbreiding geven. Bijv.:

$a + b + c + d + e + f =$	def. gedurige som
$= [\![[\{(a + b) + c\} + d] + e]\!] + f =$	O_2
$= [\![[\{a + (b + c)\} + d] + e]\!] + f =$	O_2
$= [\![\{a + (b + c)\} + (d + e)]\!] + f =$	O_2
$= \{a + (b + c)\} + \{(d + e) + f\} =$	def. gedurige som
$= a + (b + c) + (d + e + f)$.	

(de aanduiding achter het gelijkteken geeft de gebruikte eigenschap of definitie aan).

Eig. O_{22}. Een som verandert niet van waarde als men twee of meer opvolgende termen door hun som vervangt.

Bij lezing gaande van het rechterlid naar het linkerlid krijgt men:

Een som verandert niet van waarde als men een of meer termen in delen splitst.

§12. Ook de commutatieve eigenschap kunnen we een uitbreiding geven voor een gedurige som.

$$a + b + c + d + e = \quad O_{22}$$
$$= a + b + (c + d) + e = \quad O_1$$
$$= a + b + (d + c) + e = \quad O_{22}$$
$$= a + b + d + c + e.$$

Hier zijn twee opeenvolgende termen verwisseld, zonder dat de som in waarde verandert.

Door dit herhaald toe te passen krijgen we de uitbreiding der commutatieve eigenschap van de optelling:

Eig. O_{11}. Een (gedurige) som is onafhankelijk van de volgorde der termen.

§13. Bij het hoofdrekenen worden bovengenoemde eigenschappen veel toegepast. Bijvoorbeeld

$$78 + 29 = \quad O_{22}$$
$$= 75 + 3 + 25 + 4 = \quad O_{11}$$
$$= 75 + 25 + 3 + 4 = \quad O_{22}$$
$$= 100 + 7 = 107.$$

Van welke eigenschappen kunnen we gebruik maken bij de berekening van:

$28 + 13 + 72 + 40 + 47 =$;

$153 + 218 + 547 =$.

AFTREKKING VAN NATUURLIJKE GETALLEN

§14.

Definitie: Aftrekking is de bewerking, die, als van een som de som en één der termen gegeven is, de tweede term doet vinden.

$\ldots + 4 = 6;$

$2 + \ldots = 6.$

Door de commutatieve eigenschap van de optelling is het niet van belang of de eerste term of de tweede term gegeven is.

Men kan nl. $\ldots + 4 = 6$ vervangen door $4 + \ldots = 6$. Er is dus één soort aftrekking.

Daar, bij aftrekken, men van een optelling een gegeven (een term) weglaat en het gevraagde (de som) geeft, noemt men de aftrekking wel de omkering van de optelling.

Definitie: $a - b$ is het getal, dat bij b moet worden opgeteld om als som a te krijgen.
In formule: $(a - b) + b = a$.

Dit is de *definitieformule van aftrekking*.
Als $v + b = a$, kunnen we dus schrijven:
$a - b = v$.
a is het aftrektal;
b is de aftrekker;
v is het verschil van a en b.
Ook de vorm $a - b$ noemen we een verschil.
$\ldots + 4 = 6 \rightarrow 6 - 4 = \quad ;$
$2 + \ldots = 6 \rightarrow 6 - 2 = \quad .$
De aftrekking is dan en dan alleen mogelijk, als het aftrektal groter is dan de aftrekker. (Zie ook §§ 68 en 69.)

§15.
Eig. A1. De som van twee verschillen is gelijk aan het verschil van de som van de aftrektallen en de som van de aftrekkers.
In formule: $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

Het bewijs is voltooid, als aangetoond is dat $(a - b) + (c - d)$, vermeerderd met de aftrekker $(b + d)$, het aftrektal $(a + c)$ oplevert.

Bewijs:

$\{(a - b) + (c - d)\} + (b + d) =$	O22
$= (a - b) + (c - d) + b + d =$	O11
$= (a - b) + b + (c - d) + d =$	O22
$= \{(a - b) + b\} + \{(c - d) + d\} =$	def. verschil
$= a + c.$	

Indien we de gelijkheid $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ lezen beginnend bij het rechterlid, en dus de aandacht vestigen op $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$, krijgen we de lezing:

Eig. 1A. Het verschil van twee sommen, waarbij de eerste term van de eerste som groter is dan de eerste term van de tweede som en de tweede term van de eerste som groter is dan de tweede term van de tweede som, is gelijk aan de som van het verschil van de eerste termen en het verschil van de tweede termen.

Deze eigenschap ${}_1A$ wordt vaak toegepast, bijv. bij:

$37 - 12 = (30 + 7) - (10 + 2) = (30 - 10) + (7 - 2) =$
$= 20 + 5 = 25.$

$32 - 17 = (20 + 12) - (10 + 7) = (20 - 10) + (12 - 7) =$
$= 10 + 5 = 15.$

Ook, zelfs vooral, in de 'cijfervorm':

```
37       32
12       17
—— –     —— –
25       15
```

§16.

Eig. A_2. Een verschil verandert niet van waarde als men aftrektal en aftrekker met hetzelfde getal vermeerdert.

In formule: $a - b = (a + p) - (b + p)$.

Bewijs:

We beschouwen $(a + p)$ als aftrektal en $(b + p)$ als aftrekker.

$(a - b) + (b + p) =$	O_{22}
$= (a - b) + b + p =$	O_{22}
$= \{(a - b) + b\} + p =$	def. verschil
$= a + p.$	

Deze eigenschap krijgt, van het rechterlid gaande naar het linkerlid, de volgende lezing:

Eig. ${}_2A$. Een verschil verandert niet van waarde als men aftrektal en aftrekker met hetzelfde getal vermindert.

Toepassing van A_2: $817 - 98 = 819 - 100$;

${}_2A$: $913 - 103 = 910 - 100$.

§17.

Eig. A_3. Een verschil wordt met een getal vermeerderd door het aftrektal met dat getal te vermeerderen.

In formule: $(a - b) + p = (a + p) - b$.

Bewijs:

$\{(a - b) + p\} + b =$	O_{22}
$= (a - b) + p + b =$	O_{11}
$= (a - b) + b + p =$	O_{22}
$= \{(a - b) + b\} + p =$	def. verschil
$= a + p.$	

Van 'rechts naar links' lezende geeft dit:

Eig. $_3$A. Een som wordt met een getal verminderd door een der termen met dat getal te verminderen.

A_3: $(47 - 10) + 3 = 50 - 10$;
$_3A$: $(40 + 7) - 3 = 40 + 4$.

Bij de volgende aftrekking 'onder elkaar' past men $_3$A toe:

$$\begin{array}{r} 49 \\ 5 \\ \hline 44 \end{array} -$$

§18.

Eig. A_4. Een verschil wordt met een getal vermeerderd door de aftrekker met dat getal te verminderen (aangenomen, dat dit mogelijk is).

In formule: $(a - b) + p = a - (b - p)$.

Bewijs:

$\{(a - b) + p\} + (b - p) =$	O_{22}
$= (a - b) + p + (b - p) =$	O_{11}
$= (a - b) + (b - p) + p =$	O_{22}
$= (a - b) + \{(b - p) + p\} =$	def. verschil
$= (a - b) + b =$	def. verschil
$= a.$	

De tweede lezing van deze eigenschap luidt:

Eig. $_4$A. Een getal wordt met een verschil verminderd door dat getal te verminderen met het aftrektal (aangenomen, dat dit mogelijk is) en de uitkomst te vermeerderen met de aftrekker.

Opmerking:
De eigenschappen van de aftrekking worden in dit boek zoveel mogelijk bewezen met behulp van de definitie verschil en de commutatieve en associatieve eigenschappen van gedurige som (O_{11} en O_{22}). Dit geeft een zekere uniforme bewijsvoering.

Het is ook mogelijk de eigenschap A_4 te bewijzen door gebruik te maken van eerder bewezen eigenschappen van de aftrekking.

Bijvoorbeeld:
Te bewijzen: $(a - b) + p = a - (b - p)$.

Bewijs:

$(a - b) + p =$ A3
$= (a + p) - b =$ 2A
$= a + (b - p).$

§19.

Eig. A5. Een verschil wordt met een getal verminderd door het aftrektal met dat getal te verminderen.
In formule: $(a - b) - p = (a - p) - b.$

Bewijs:

$\{(a - b) - p\} + b =$ A3
$= \{(a - b) + b\} - p =$ def. verschil
$= a - p.$

De tweede lezing is gelijk aan die van eigenschap A5.

§20.

Eig. A6. Een verschil wordt met een getal verminderd door de aftrekker met dat getal te vermeerderen.
In formule: $(a - b) - p = a - (b + p).$

Bewijs:

$\{(a - b) - p\} + (b + p) =$ O22
$= \{(a - b) - p\} + b + p =$ O11
$= \{(a - b) - p\} + p + b =$ def. gedurige som
$= [\{(a - b) - p\} + p] + b =$ def. verschil
$= (a - b) + b =$ def. verschil
$= a.$

Beginnend bij het rechterlid, krijgen we de lezing:

Eig. 6A. Een getal wordt met een som verminderd door dat getal te verminderen met de ene term en de uitkomst te verminderen met de andere term.

§21. 998 — 137 kunnen we als volgt berekenen:

$998 - 137 =$ A2
$= 1000 - 139 =$ 6A
$= (1000 - 100) - 39 =$
$= 900 - 39 =$ 3A
$= 800 + (100 - 39) =$
$= 800 + 61 =$
$= 861.$

Bereken:

$358 - 197 =$;
$(914 - 703) - 23 =$.

VERMENIGVULDIGING VAN NATUURLIJKE GETALLEN

§22. Vormen we de som van twee of meer gelijke getallen: $b + b + b + \ldots + b$ (a termen), dan heet deze som het *produkt* van a en b.

Een andere schrijfwijze voor dit produkt is $a \times b$; ook wel $a \cdot b$ of ab.

a en b heten de *factoren* van het produkt. Ook de vorm $a \times b$ ($a \cdot b$; ab) noemen we een produkt.

Hoewel $1 \times b$ niet een andere schrijfwijze is voor een som met gelijke termen b, noemen we $1 \times b$ een produkt, waarvan de waarde b is.

$4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$;
$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$;
$5 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$;
$1 \times 5 = 5$.

Definitie: Vermenigvuldiging is de bewerking, die ons van twee getallen het produkt doet vinden.

§23. Als we a vermenigvuldigen met b, daarna het produkt van a en b vermenigvuldigen met c, de verkregen uitkomst dan vermenigvuldigen met d (als er meer getallen zijn, gaan we door tot alle getallen zo gebruikt zijn), ontstaat het *gedurig produkt* van a, b, c en d.

We schrijven dit als $d \times c \times b \times a$.

Dus $d \times c \times b \times a =$
$= d \times c \times (b \times a) =$
$= d \times \{c \times (b \times a)\}$.

Hier is dus geen eigenschap gebruikt, maar is de bepaling van het gedurig produkt van a, b, c en d voortgezet tot zijn eindfase. Indien geen verwarring kan optreden, zullen we een gedurig produkt ook zonder meer 'produkt' noemen.

§24. $a \times 1 = a$; $1 \times a = a$.

Een produkt van twee factoren, waarvan een der factoren 1 is, is gelijk aan de andere factor.

Deze grondeigenschap noemen we de *moduluseigenschap* van de vermenigvuldiging.

De eigenschap dat het produkt van een getal en 1 gelijk is aan dat getal, wordt ook wel aangeduid door: *het getal 1 is de modulus der vermenigvuldiging.*

§25.

Eig. V_1. Een produkt is onafhankelijk van de volgorde der factoren.

In formule: $a \times b = b \times a$.

Bewijs:

$a \times b = b + b + b + \ldots + b$ (a termen)

$b = b \times 1$ (moduluseigenschap) $= 1 + 1 + 1 \ldots + 1$ (b termen)

dus $a \times b =$

$$a \text{ rijen} \left\{ \begin{array}{ll} 1 + 1 + 1 \ldots + 1 & (b \text{ termen}) \\ 1 + 1 + 1 \ldots + 1 & (b \text{ termen}) \\ 1 + 1 + 1 \ldots + 1 & (b \text{ termen}) \\ . & \\ . & \\ . & \\ 1 + 1 + 1 \ldots + 1 & (b \text{ termen}) \end{array} \right.$$

Door een andere groepering van deze hoeveelheid – we nemen alle termen in een verticale kolom – vinden we b groepen van elk a termen 1, d.w.z. b termen a, waarvoor we kunnen schrijven $b \times a$.

$a \times b = b \times a$.

We noemen deze eigenschap de *commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging.*

In verband met de moduluseigenschap geldt $a \times 1 = 1 \times a$.

§26.

Eig. V_2. Een produkt van drie factoren is onafhankelijk van de groepering der factoren (de factoren houden wel hun zelfde volgorde).

In formule: $a \times b \times c = (a \times b) \times c$.

Bewijs:

$$a \times b \times c = a \times (b \times c) =$$
$$= b \times c + b \times c \ldots + b \times c \ (a \text{ termen}) =$$

$$a \text{ rijen} \begin{cases} c + c + c + \ldots + c & (b \text{ termen}) \\ c + c + c + \ldots + c & (b \text{ termen}) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ c + c + c + \ldots + c & (b \text{ termen}) \end{cases}$$

We hebben dus a verzamelingen met elk b gelijke elementen, d.w.z. $a \times b$ gelijke elementen c, wat we kunnen schrijven als $(a \times b) \times c$.
Deze eigenschap heet de *associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging.*

§27. Evenals bij de gedurige som kent men ook bij het gedurig produkt een uitbreiding van de commutatieve eigenschap. Het bewijs wordt gegeven op een wijze analoog aan het bewijs van de uitbreiding van de commutatieve eigenschap van de optelling.

Eig. V_{11}. Een gedurig produkt is onafhankelijk van de volgorde der factoren.

§28. Ook de associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging kan voor een gedurig produkt worden uitgebreid. Bijvoorbeeld:

$$a \times b \times c \times d \times e \times f = b \times (a \times d \times f) \times c \times e.$$

Bewijs:

$a \times b \times c \times d \times e \times f =$	V_{11}
$= b \times c \times e \times a \times d \times f =$	def. gedurig produkt
$= b \times c \times e \times (a \times d \times f) =$	V_{11}
$= b \times (a \times d \times f) \times c \times e.$	

Eig. V_{22}. Een gedurig produkt is onafhankelijk van de groepering van de factoren.

§29.

Eig. V_3. Een som wordt met een getal vermenigvuldigd door beide termen met dat getal te vermenigvuldigen.
In formule: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$

$a \times b + a \times c$ betekent: na de vermenigvuldiging van a en b en a en c worden de produkten opgeteld: zie voorts §67.

Bewijs:

$$\begin{aligned}
&a \times (b + c) = \quad \text{def. produkt} \\
&= (b + c) + (b + c) + \ldots + (b + c) \\
&\qquad\qquad (a \text{ termen}) = \quad O_{22} \\
&= b + c + b + c + b + c + \ldots + b + c \\
&\qquad\qquad (2a \text{ termen}) = \quad O_{11} \\
&= b + b + b + \ldots + b + c + c + c \ldots + c \\
&\qquad\qquad (2a \text{ termen}) = \quad O_{22} \\
&= \underbrace{(b + b + b + \ldots)}_{a \text{ termen}} + \underbrace{(c + c + c \ldots)}_{a \text{ termen}} = \quad \text{def. produkt} \\
&= a \times b + a \times c.
\end{aligned}$$

Deze eigenschap noemen we de *distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling.*

De tweede lezing luidt:

Eig. $_3$V. De som van twee produkten, waarvan de eerste factoren gelijk zijn, is gelijk aan het produkt van zo'n factor en de som der tweede factoren.

Als van twee produkten een factor van het ene produkt gelijk is aan een factor van het andere produkt, kan men, zo nodig, bereiken (met toepassing van de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging), dat de eerste factoren gelijk worden.

De distributieve eigenschap kan worden uitgebreid voor een gedurige som.

$$\begin{aligned}
&a \times (b + c + d) = \\
&= a \times \{(b + c) + d\} = \quad V_3 \\
&= a \times (b + c) + a \times d = \quad V_3 \\
&= a \times b + a \times c + a \times d.
\end{aligned}$$

Eig. V_{33}. Een (gedurige) som wordt met een getal vermenigvuldigd door elk der termen met dat getal te vermenigvuldigen.

$2 \times 314 = 2 \times (300 + 10 + 4) = 600 + 20 + 8 = 628.$

$$\begin{array}{r} 314 \\ 2 \\ \hline 628 \end{array} \times$$

§30.

Eig. V4. Een verschil wordt met een getal vermenigvuldigd door aftrektal en aftrekker met dat getal te vermenigvuldigen.
In formule: $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$.

Bewijs:

$\{a \times (b - c)\} + a \times c =$ 3V
$= a \times \{(b - c) + c\} =$ def. verschil
$= a \times b$.

Dit is de *distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging ten opzichte van de aftrekking.*

De tweede lezing luidt:

Eig. 4V. Het verschil van twee produkten die de eerste factoren gelijk hebben, is gelijk aan het produkt van zo'n factor en het verschil der tweede factoren.

DELING VAN NATUURLIJKE GETALLEN

§31.

Definitie: Deling is de bewerking, die, als van een produkt het produkt en één van de factoren gegeven is, ons de andere factor doet vinden.

$\ldots \times 4 = 28$;
$7 \times \ldots = 28$.

Door de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging is het niet van belang of de eerste factor of de tweede factor gegeven is; er is dus één soort deling.

Opmerking:

Men maakt soms wel onderscheid tussen het geval dat de eerste factor wordt weggelaten en het geval dat de tweede factor wordt weggelaten.

Dit heeft vooral zin in verband met praktische toepassingen, als

5 × 3 knikkers = 15 knikkers.
.. × 3 knikkers = 15 knikkers → verhoudingsdeling (zie §41);
5 × .. knikkers = 15 knikkers → verdelingsdeling.

De deling noemt men de omkering van de vermenigvuldiging.

Definitie: $a : b$ is het getal, dat met b vermenigvuldigd a oplevert.
In formule: $(a : b) \times b = a$.

Dit is de *definitieformule van deling.*
Als $q \times b = a$, is dus $a : b = q$.
a is het deeltal;
b is de deler;
q is het quotiënt.
Ook de vorm $a : b$ noemen we een quotiënt.

$\ldots \times 4 = 28 \rightarrow 28 : 4 = \quad ;$
$7 \times \ldots = 28 \rightarrow 28 : 7 = \quad .$

§32.
Eig. D1. Het produkt van twee quotiënten is gelijk aan het quotiënt van het produkt van de deeltallen en het produkt van de delers.
In formule: $(a : b) \times (c : d) = (a \times c) : (b \times d)$.
We bewijzen, dat $(a : b) \times (c : d)$ vermenigvuldigd met de deler $(b \times d)$ het deeltal $(a \times c)$ oplevert. (Deze bewijsmethode zullen we bij het bewijzen van de eigenschappen van de deling zoveel mogelijk aanhouden.)

Bewijs:
$\{(a : b) \times (c : d)\} \times (b \times d) =$ V22
$= (a : b) \times (c : d) \times b \times d =$ V11
$= (a : b) \times b \times (c : d) \times d =$ V22
$= \{(a : b) \times b\} \times \{(c : d) \times d\} =$ def. quotiënt
$= a \times c$.

De tweede lezing luidt:

Eig. 1D. Het quotiënt van twee produkten is gelijk aan het produkt van het quotiënt van de eerste factoren en het quotiënt van de tweede factoren (aangenomen dat deze quotiënten bestaan en de factoren uit de deler van het gegeven quotiënt beide keren delers zijn).

§33.
Eig. D2. Een quotiënt verandert niet van waarde als men deeltal en deler met hetzelfde getal vermenigvuldigt.
In formule: $a : b = a \times p : b \times p$.

Bewijs:

$(a : b) \times (b \times p) =$ V22
$= (a : b) \times b \times p =$ V22
$= \{(a : b) \times b\} \times p =$ def. quotiënt
$= a \times p.$

Tweede lezing (van rechterlid naar linkerlid):

Eig. 2D. Een quotiënt verandert niet van waarde als men deeltal en deler door hetzelfde getal deelt.

§34.

Eig. D3. Een quotiënt wordt met een getal vermenigvuldigd door het deeltal met dat getal te vermenigvuldigen.
In formule: $(a : b) \times p = a \times p : b.$

Bewijs:

$\{(a : b) \times p\} \times b =$ V22
$= (a : b) \times p \times b =$ V11
$= (a : b) \times b \times p =$ V22
$= \{(a : b) \times b\} \times p =$ def. quotiënt
$= a \times p.$

Tweede lezing:

Eig. 3D. Een produkt wordt door een getal gedeeld door een der factoren door dat getal te delen.

§35.

Eig. D4. Een quotiënt wordt met een getal vermenigvuldigd door de deler door dat getal te delen (aangenomen dat dit mogelijk is).
In formule: $(a : b) \times p = a : (b : p).$

Bewijs:

$\{(a : b) \times p\} \times (b : p) =$ V22
$= (a : b) \times p \times (b : p) =$ V11
$= (a : b) \times (b : p) \times p =$ V22
$= (a : b) \times \{(b : p) \times p\} =$ def. quotiënt
$= (a : b) \times b =$ def. quotiënt
$= a.$

Tweede lezing:

Eig. $_4$D. Een getal wordt door een quotiënt gedeeld door dat getal te delen door het deeltal en de uitkomst te vermenigvuldigen met de deler.

§36.

Eig. D_5. Een quotiënt wordt door een getal gedeeld, door het deeltal door dat getal te delen.
In formule: $(a : b) : p = (a : p) : b$.

Bewijs:

$\{(a : b) : p\} \times b =$	D_3
$= (a : b) \times b : p =$	def. quotiënt
$= a : p$.	

De tweede lezing (bij het rechterlid beginnend) is gelijk aan de eerste lezing.

§37.

Eig. D_6. Een quotiënt wordt door een getal gedeeld door de deler met dat getal te vermenigvuldigen.
In formule: $(a : b) : p = a : b \times p$.
$a : b \times p$ betekent het quotiënt van a en het produkt van b en p; zie voorts §67.

Bewijs:

$\{(a : b) : p\} \times (b \times p) =$	V_{22}
$= \{(a : b) : p\} \times b \times p =$	V_{11}
$= \{(a : b) : p\} \times p \times b =$	V_{22}
$= [\{(a : b) : p\} \times p] \times b =$	def. quotiënt
$= (a : b) \times b =$	def. quotiënt
$= a$.	

De tweede lezing luidt:

Eig. $_6$D. Een getal wordt door een produkt gedeeld door het getal door de ene factor te delen en het verkregen quotiënt door de andere factor te delen.

§38.

Eig. D_7. Een som wordt door een getal gedeeld door elk van de termen door dat getal te delen.
In formule: $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Bewijs:

$(a : c + b : c) \times c =$ $\quad$ V_3
$= (a : c) \times c + (b : c) \times c =$ $\quad$ def. quotiënt
$= a + b.$

Tweede lezing:

Eig. 7D. De som van twee quotiënten, die gelijke delers hebben, is gelijk aan het quotiënt van de som van de deeltallen en een van de gelijke delers.

§39.

Eig. D_8. Een verschil wordt door een getal gedeeld door aftrektal en aftrekker door dat getal te delen.
In formule: $(a - b) : c = a : c - b : c.$

Bewijs:

$(a : c - b : c) \times c =$ $\quad$ V_4
$= (a : c) \times c - (b : c) \times c =$ $\quad$ def. quotiënt
$= a - b.$

Tweede lezing:

Eig. 8D. Het verschil van twee quotiënten, die gelijke delers hebben, is gelijk aan het quotiënt van het verschil van de deeltallen en een van de gelijke delers.

§40. We hebben bovenstaande eigenschappen zoveel mogelijk bewezen door een der leden te beschouwen als deeltal gedeeld door deler, en dan aan te tonen dat deze deler vermenigvuldigd met het andere lid het deeltal oplevert.

Hierdoor krijgt men een uniforme bewijsvoering; de bewijzen zijn echter wel eens wat langer dan wanneer reeds afgeleide eigenschappen worden gebruikt.

Zo kan bijv. eig. D_6 $(a : b) : p = a : b \times p$ eenvoudiger als volgt bewezen worden:

$(a : b) : p =$ $\quad$ D_5
$= (a : p) : b =$ $\quad$ D_2
$= (a : p) \times p : b \times p =$ $\quad$ def. quotiënt
$= a : b \times p.$

Hierbij maken we dus gebruik van eerder bewezen eigenschappen van de deling.

§41. Het quotiënt 30 : 5 is een andere schrijfwijze voor:

a. $\ldots \times 5 = 30$;
b. $5 \times \ldots = 30$.

In geval a $\ldots \times 5 = 30$ kan men de deling 30 : 5 beschouwen als bewerking, die antwoord geeft op de vraag: hoeveel termen heeft de (gedurige) som, die slechts termen 5 bevat, en de waarde 30 heeft.

$5 + 5 + 5 + \ldots = 30.$

In geval b $5 \times \ldots = 30$ kan men 30 : 5 beschouwen als: hoe groot is elke term, als een som van 5 gelijke termen de waarde 30 heeft?

$. + . + . + . + . = 30$

In geval a noemt men 30 : 5 een *verhoudingsdeling.*
In geval b noemt men 30 : 5 een *verdelingsdeling.*

In geval a kan men de vraag ook zo stellen: hoe vaak kan men van 30 5 aftrekken? Waarmee men dan bedoelt, dat men 30 vermindert met 5, van het verkregen verschil weer 5 aftrekt en zo doorgaat tot de laatste uitkomst 0 is. (Zie voor het getal 0 §68.)

NIET-OPGAANDE DELING

§42. Indien we vragen: hoe vaak kan men van 32 5 aftrekken? (zie vorige §), blijkt bij de beantwoording, dat dit wèl 6 keer, maar geen 7 keer gaat. Bij deze aftrekking blijft 2 over; de aftrekking kan niet verder uitgevoerd worden, omdat $2 < 5$. We noemen nu 6 *het partiële quotiënt* van de deling van 32 gedeeld door 5, (meestal kortweg het quotiënt van 32 gedeeld door 5).

Het getal 2 heet de *rest*, en de deling is in dit geval een *niet-opgaande* deling.

In het algemeen:
als $a = q \times b + r$ en $r < b$,
dan noemen we q het quotiënt en r de rest van de deling $a : b$

Als $r = 0$ spreekt men van een *opgaande* deling.

Als $r \neq 0$, is $a : b$ een *niet-opgaande* deling.

§43.

Eig. D_9. Als men deeltal en deler van een niet-opgaande deling met hetzelfde getal vermenigvuldigt, wordt de rest met dit getal vermenigvuldigd en verandert het quotiënt niet.

Bewijs: Van de deling $a : b$ is q het quotiënt en r de rest, dus

$a = q \times b + r$ V_3
$k \times a = k \times (q \times b) + k \times r$
$ka = q \times kb + kr$, en dit betekent dat de deling
$ka : kb$ q tot quotiënt en kr tot rest heeft.

MACHTSVERHEFFING VAN NATUURLIJKE GETALLEN

§44. Onder de p^e macht van a (ook wel a tot de macht p) verstaan we het produkt

$a \times a \times a \times a \ldots \times a$ (p factoren).

We schrijven dit als a^p.

a is het *grondtal* van de macht;
p is de *exponent* van de macht.

Definitie: Machtsverheffing is de bewerking die, als grondtal en exponent gegeven zijn, de macht oplevert.

$2^3 = 2 \times 2 \times 2;$
$3^2 = 3 \times 3.$

Uit dit voorbeeld blijkt, dat in het algemeen de machtsverheffing *niet-commutatief* is. We spreken af:

$a^1 = a.$

De macht van a met exponent 2 (a^2) noemen we ook wel het *kwadraat* (of het *vierkant*) van a.

Machten met gelijke exponenten heten *gelijknamige* machten.

Machten met gelijke grondtallen heten *gelijksoortige* machten.

§45.

Eig. M_1. Een macht van het produkt van twee getallen is gelijk aan het produkt van de gelijknamige machten van de factoren.
In formule: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

Bewijs:

$$\begin{aligned}
&(a \times b)^n = && \text{def. macht}\\
&= (a \times b) \times (a \times b) \ldots \times (a \times b) \ (n \text{ factoren}) = && V_{22}\\
&= a \times b \times a \times b \times a \times b \ldots \times a \times b \ (2n \text{ factoren}) = && V_{11}\\
&= \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ factoren}} \times \underbrace{b \times b \times b \ldots \times b}_{n \text{ factoren}} = && V_{22}\\
&= \underbrace{(a \times a \times a \ldots \times a)}_{n \text{ factoren}} \times \underbrace{(b \times b \times b \ldots \times b)}_{n \text{ factoren}} = && \text{def. macht}\\
&= a^n \times b^n.
\end{aligned}$$

De tweede lezing krijgt men door de formule te lezen van het tweede lid gaande naar het eerste lid.

Eig. $_1$M. Het produkt van twee gelijknamige machten is gelijk aan de gelijknamige macht van het produkt van de grondtallen.

Bovengenoemde eigenschap is de *distributieve eigenschap van de machtsverheffing ten opzichte van de vermenigvuldiging.*

§46. De distributieve eigenschap van de machtsverheffing is uit te breiden voor een gedurig produkt.

Eig. M$_{11}$. Een macht van een (gedurig) produkt is gelijk aan het (gedurig) produkt van de gelijknamige machten van de factoren.
In formule: $(a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$.

Bewijs:

$$\begin{aligned}
&(a \times b \times c)^n = && \text{def. gedurig produkt}\\
&= \{a \times (b \times c)\}^n = && M_1\\
&= a^n \times (b \times c)^n = && M_1\\
&= a^n \times (b^n \times c^n) = && V_{22}\\
&= a^n \times b^n \times c^n.
\end{aligned}$$

§47.

Eig. M$_2$. Een macht van een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de gelijknamige machten van deeltal en deler.
In formule: $(a : b)^n = a^n : b^n$.
Om deze formule te bewijzen beschouwen we a^n als deeltal en b^n als deler, en bewijzen dat $(a : b)^n \times$ deler $=$ deeltal.

Bewijs:

$(a : b)^n \times b^n =$ 1M
$= \{(a : b) \times b\}^n =$ def. quotiënt.
$= a^n.$

De tweede lezing (van rechts naar links) luidt:

Eig. 2M. Het quotiënt van twee gelijknamige machten is gelijk aan de gelijknamige macht van het quotiënt van de grondtallen.

Dit is de *distributieve eigenschap van de machtsverheffing ten opzichte van de deling.*

§48.

Eig. M3. Het produkt van twee gelijksoortige machten is een gelijksoortige macht, die tot exponent heeft de som van de exponenten van de factoren.
In formule: $a^p \times a^q = a^{p+q}$.

Bewijs:

$a^p \times a^q =$ def. macht
$= \underbrace{(a \times a \times a \times a \ldots \times a)}_{p \text{ factoren}} \times \underbrace{(a \times a \times a \ldots \times a)}_{q \text{ factoren}} =$ V22
$= a \times a \times a \times a \times \ldots \times a (p + q \text{ factoren}) =$ def. macht
$= a^{p+q}.$

De tweede lezing luidt:

Eig. 3M. Een macht waarvan de exponent een som van twee termen is, is gelijk aan het produkt van twee gelijksoortige machten, die de termen van de som tot exponenten hebben.

§49.

Eig. M4. Het quotiënt van twee gelijksoortige machten is een gelijksoortige macht, die tot exponent heeft het verschil van de exponenten van deeltal en deler.
In formule: $a^p : a^q = a^{p-q}$.

Bewijs:

$a^{p-q} \times a^q =$ M3
$= a^{(p-q)+q} =$ def. verschil
$= a^p.$

Tweede lezing:

Eig. $_4$M. Een macht, waarvan de exponent een verschil is, is gelijk aan het quotiënt van twee gelijksoortige machten, waarvan deeltal en deler respectievelijk aftrektal en aftrekker van dat verschil tot exponent hebben.

§50.

Eig. M$_5$. Een macht van een macht van een getal is gelijk aan een macht van dat getal, die tot exponent heeft het produkt van de exponenten.

In formule: $(a^p)^q = a^{qp}$.

Bewijs:

$(a^p)^q =$	def. macht
$= a^p \times a^p \times a^p \times \ldots \times a^p$ (q factoren) $=$	M$_3$
$= a^{p+p+p+p\ldots+p}$ (q termen) $=$	def. produkt
$= a^{qp}$.	

Tweede lezing:

Eig. $_5$M. Een macht, waarvan de exponent een produkt is, is gelijk aan de macht van een gelijksoortige macht, waarbij de exponenten van die machten gelijk zijn aan de factoren van dat produkt.

§51. Uit $2^3 \neq 3^2$ blijkt, dat de machtsverheffing in het algemeen *niet-commutatief* is; in een bijzonder geval is het wel mogelijk:

$2^4 = 4^2$.

Zo is de machtsverheffing in het algemeen ook *niet-associatief*, wat bijv. blijkt uit:

$(2^3)^2 = 8^2 = 64$;

$2^{(3^2)} = 2^9 = 512$; dus

$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$.

Met de uitdrukking a^{b^c} bedoelt men $a^{(b^c)}$.

§52. Doordat de machtsverheffing niet commutatief is, kennen we van de machtsverheffing twee omgekeerde bewerkingen.

Bij $\ldots^p = b$ vragen we naar het grondtal. Dit grondtal heet in dit geval de p^e-*machtswortel* uit b. We schrijven deze p^e-machtswortel uit b als $\sqrt[p]{b}$.

De bewerking die deze wortel doet vinden heet worteltrekking.

Bij $a^{\cdots} = b$ vragen we naar de exponent. Deze exponent heet in dit geval de *logaritme van b voor het grondtal a*; ook wel de *a-logaritme van b*. We schrijven deze a-logaritme van b als ${}^a\log b$.

Het bepalen van de logaritme heet logaritmeneming.

Worteltrekking

§53.

Definitie: $\sqrt[p]{a}$ *is het getal, dat tot de* p^e *macht verheven* a *oplevert.*

In formule: $(\sqrt[p]{a})^p = a$.

a is het grondtal;

p is de wortelexponent; ook wel, als geen verwarring met machtsexponent mogelijk is, 'exponent' zonder meer.

Voorbeeld:

$\ldots^3 = 125 \rightarrow \sqrt[3]{125} = \;\;.$

Wortels met gelijke exponenten noemen we *gelijknamig.*

$\sqrt[2]{a}$ schrijft men meestal als: $\sqrt{a}$; zo is $\sqrt{49} = 7$.

§54.

Eig. W1. De wortel uit het produkt van twee factoren is gelijk aan het produkt van de gelijknamige wortels uit elk van die factoren.

In formule: $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b}$.

Als we kunnen aantonen, dat de p^e macht van het getal $\sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b}$ gelijk is aan ab, volgt hieruit, in verband met de definitie van p^e-machtswortel uit een getal, dat $\sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b}$ inderdaad de p^e-machtswortel uit ab is.

Bewijs:

$(\sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b})^p =$ M1
$= (\sqrt[p]{a})^p \times (\sqrt[p]{b})^p =$ def. p^e-machtswortel
$= a \times b.$

De tweede lezing (van rechterlid naar linkerlid) luidt:

Eig. 1W. Het produkt van twee gelijknamige wortels is gelijk aan de gelijknamige wortel uit het produkt van de grondtallen.

Dit is de *distributieve eigenschap van de worteltrekking ten opzichte van de vermenigvuldiging.*

§55. De distributieve eigenschap van de worteltrekking kan een meer algemene betekenis krijgen; deze eigenschap geldt ook voor een gedurig produkt.

Eig. W11. De wortel uit een (gedurig) produkt is gelijk aan het produkt van de gelijknamige wortels uit elk van de factoren.

In formule: $\sqrt[p]{abc} = \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b} \times \sqrt[p]{c}.$

Bewijs:

$\sqrt[p]{a \times b \times c} =$ def. gedurig produkt

$= \sqrt[p]{a \times (b \times c)} =$ W1

$= \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b \times c} =$ W1

$= \sqrt[p]{a} \times (\sqrt[p]{b} \times \sqrt[p]{c}) =$ V22

$= \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b} \times \sqrt[p]{c}.$

§56.

Eig. W2. De wortel uit een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de gelijknamige wortels uit deeltal en deler.

In formule: $\sqrt[p]{a : b} = \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b}.$

Ook hier bewijzen we: quotiënt = deeltal: deler, door aan te tonen: quotiënt × deler = deeltal.

Bewijs:

$\sqrt[p]{a : b} \times \sqrt[p]{b} =$ 1W
$= \sqrt[p]{(a : b) \times b} =$ def. quotiënt
$= \sqrt[p]{a}.$

De tweede lezing luidt:

Eig. $_2$W. Het quotiënt van twee gelijknamige wortels is gelijk aan de gelijknamige wortel uit het quotiënt van de grondtallen.

Dit is *de distributieve eigenschap van de worteltrekking ten opzichte van de deling.*

§57.

Eig. W$_3$. De wortel uit een macht van een getal is een macht van dat getal, die tot exponent heeft het quotiënt van machtsexponent en wortelexponent, indien dit quotiënt bestaat.

In formule: $\sqrt[p]{a^n} = a^{n:p}$.

Bewijs:

$(a^{n:p})^p =$	M$_5$
$= a^{p\times(n:p)} =$	V$_1$
$= a^{(n:p)\times p} =$	def. quotiënt
$= a^n.$	

De p^e macht van $a^{n:p}$ is a^n; dus krachtens de definitie van p^e-machtswortel blijkt, dat $a^{n:p}$ inderdaad de p^e-machtswortel van a^n is.

De tweede lezing luidt:

Eig. $_3$W. Een macht, waarvan de exponent een quotiënt is, is gelijk aan de wortel – met als wortelexponent de deler van het quotiënt – uit die macht van hetzelfde grondtal, welke tot machtsexponent het deeltal van het quotiënt heeft.

§58.

Eig. W$_4$. De wortel uit een wortel is een wortel uit hetzelfde grondtal, die tot exponent heeft het produkt van de wortelexponenten.

In formule: $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$.

Bewijs:

$(\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}})^{pq} =$	V$_1$
$= (\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}})^{qp} =$	$_5$M

$= \{(\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}})^p\}^q =$ def. p^e-machtswortel

$= (\sqrt[q]{a})^q =$ def. q^e-machts wortel

$= a.$

Hieruit volgt, dat $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$ inderdaad de pq^e-machtswortel uit a is.

Tweede lezing:

Eig. $_4$W. Een wortel, waarvan de exponent een produkt van twee factoren is, is gelijk aan de wortel uit een wortel uit hetzelfde grondtal, waarvan de exponenten gelijk zijn aan de factoren van het produkt.

§59.

Eig. W$_5$. De macht van een wortel is gelijk aan de gelijknamige wortel uit de gelijknamige macht van het grondtal.

In formule: $(\sqrt[p]{a})^n = \sqrt[p]{a^n}$.

Bewijs:

$\{(\sqrt[p]{a})^n\}^p =$ M$_5$

$= (\sqrt[p]{a})^{pn} =$ V$_1$

$= (\sqrt[p]{a})^{np} =$ $_5$M

$= \{(\sqrt[p]{a})^p\}^n =$ def. p^e-machtswortel

$= a^n.$

De p^e macht van $(\sqrt[p]{a})^n$ is a^n, dus dat betekent dat $(\sqrt[p]{a})^n$ inderdaad de p^e-machtswortel uit a^n is.

Tweede lezing:

Eig. $_5$W. Een wortel uit een macht is de gelijknamige macht van de gelijknamige wortel uit het grondtal.

§60.

Eig. W$_6$. Een wortel uit een macht verandert niet van waarde, als men machtsexponent en wortelexponent met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

In formule: $\sqrt[p]{a^n} = \sqrt[qp]{a^{qn}}$.

Bewijs:

$(\sqrt[p]{a^n})^{qp} =$ $_5$M

$= \{(\sqrt[p]{a^n})^p\}^q =$ def. p^e-machtswortel
$= (a^n)^q =$ M_5
$= a^{qn}$.

Hieruit volgt dat $\sqrt[p]{a}$ inderdaad de qp^e-machtswortel uit a^{qp} is.

Tweede lezing:

Eig. $_6$W. Een wortel uit een macht verandert niet van waarde als men machtsexponent en wortelexponent door hetzelfde getal deelt.

Logaritmeneming

§61.

Definitie: De logaritme van b voor het grondtal a is de exponent van de macht waartoe men a moet verheffen om b te krijgen.

Voor de logaritme van *b* voor het grondtal *a* schrijft men $^a\log b$ (spreek uit: de *a*-logaritme van *b*; kortweg: de *a*-log van *b*).

De definitie van het getal $^a\log b$ wordt uitgedrukt door de volgende definitieformule:

$$a^{^a\log b} = b.$$

Voorbeeld: $^2\log 16 = 4$, want $2^4 = 16$.
Logaritmen met hetzelfde grondtal heten *gelijksoortig*.

§62.

Eig. L_1. De logaritme van een produkt is gelijk aan de som van de gelijksoortige logaritmen van de factoren.

In formule: $^p\log ab = {}^p\log a + {}^p\log b$.

Als aangetoond is, dat de macht met *p* als grondtal en $^p\log a + {}^p\log b$ als exponent, gelijk is aan *ab*, is krachtens de definitie van logaritme bewezen dat $^p\log a + {}^p\log b$ inderdaad de *p*-log van *ab* is.

Bewijs:

$p^{^p\log a + ^p\log b} =$ $_3$M
$= p^{^p\log a} \times p^{^p\log b} =$ def. logaritme
$= a \times b$.

Tweede lezing (van rechterlid gaande naar linkerlid):

Eig. $_1$L. De som van twee gelijksoortige logaritmen is gelijk aan de gelijksoortige logaritme van het produkt van de getallen waarvan de logaritme moet worden genomen.

§63.

Eig. L$_2$. De logaritme van een quotiënt is gelijk aan het verschil van de gelijksoortige logaritmen van deeltal en deler.

In formule: ${}^p\log(a : b) = {}^p\log a - {}^p\log b$.

Bewijs:

$p^{{}^p\log a - {}^p\log b} =$ $\quad$ $_4$M

$= p^{{}^p\log a} : p^{{}^p\log b} =$ $\quad$ def. logaritme

$= a : b$.

Tweede lezing:

Eig. $_2$L. Het verschil van twee gelijksoortige logaritmen is gelijk aan de gelijksoortige logaritme van het quotiënt van de getallen, waarvan de logaritme moet worden genomen.

§64.

Eig. L$_3$. De logaritme van de macht van een getal is gelijk aan het produkt van de machtsexponent en de gelijksoortige logaritme van dat getal.

In formule: ${}^p\log a^n = n \times {}^p\log a$.

Bewijs:

$p^{n \times {}^p\log a} =$ $\quad$ $_5$M

$= \left(p^{{}^p\log a}\right)^n =$ $\quad$ def. logaritme

$= a^n$.

Dus $(n \times {}^p\log a)$ is inderdaad de p -logaritme van a^n.

De tweede lezing luidt:

Eig. $_3$L. Het produkt van een getal en de logaritme van een getal is gelijk aan de gelijksoortige logaritme van de macht die het eerste getal als exponent en het tweede getal als grondtal heeft.

§65.

Eig. L4. De logaritme van een wortel uit een getal is gelijk aan het quotiënt dat de gelijksoortige logaritme van dat getal als deeltal en de wortelexponent als deler heeft.

In formule: ${}^{p}\log\sqrt[n]{a} = {}^{p}\log a : n$.

Bewijs:

$$p^{{}^{p}\log a:n} = \qquad \text{3W}$$

$$= \sqrt[n]{p^{{}^{p}\log a}} = \qquad \text{def. logaritme}$$

$$= \sqrt[n]{a}.$$

Dus is (${}^{p}\log a : n$) inderdaad de p-logaritme van $\sqrt[n]{a}$.

Tweede lezing:

Eig. 4L. Het quotiënt waarvan de logaritme van een getal deeltal is, is de gelijksoortige logaritme van de wortel uit dat getal die de deler als wortelexponent heeft.

OVERZICHT VAN DE BEWERKINGEN

§66.

Rechtstreekse bewerkingen	*Omkeringen*
Optelling	Aftrekking
Vermenigvuldiging	Deling
Machtsverheffing	Worteltrekking Logaritmeneming

De rechtstreekse bewerkingen zijn voor de natuurlijke getallen onbeperkt uitvoerbaar, d.w.z., als a en b natuurlijke getallen zijn, dan zijn $a + b$, $a \times b$ en a^b ook natuurlijke getallen.

Voor de omgekeerde bewerkingen is dit niet het geval, zoals bijv. blijkt uit

$2 - 7$; $3 : 2$; $\sqrt[3]{7}$; ${}^{2}\log 5$.

Opdat deze omkeringen ook onbeperkt uitgevoerd kunnen worden, is nodig dat het getalbegrip wordt uitgebreid door nieuwe getalsoorten in te voeren, bijv.

het getal nul; de breuken; de negatieve getallen.

§67. Indien verschillende bewerkingen achter elkaar moeten worden uitgevoerd, dient dit te geschieden in onderstaande volgorde:

Machtsverheffing
Worteltrekking – logaritmeneming
Vermenigvuldiging
Deling
Optelling – aftrekking.

Een bewerking, die hoger geplaatst is gaat vóór een lager geplaatste bewerking. Worteltrekking en logaritmeneming zijn gelijkwaardig, evenals optelling en aftrekking.

Voorbeelden:

$100 : {}^3\log 9^2 = 100 : {}^3\log 81 = 100 : 4 = 25.$
$50 : 5^2 = 50 : 25 = 2.$
$3 \times 7^2 = 3 \times 49 = 147.$
$7 \times 10 : 2 = 70 : 2 = 35.$
$7 \times 3 + 10 : 2 = 21 + 5 = 26.$
$18 + 2 - 7 + 3 = 20 - 7 + 3 = 13 + 3 = 16.$

Bij deze laatste bewerking – met slechts optelling en aftrekking – neemt men de volgorde van links naar rechts.

Opmerking:

Voor $5 - 7 + 4$ neemt men: $5 + 4 - 7 = 9 - 7 = 2.$

Het veel gebruikte, maar *onjuiste* ezelsbruggetje: Mijnheer Van Dalen Wacht Op Antwoord, suggereert onder meer dat optellen vóór aftrekken gaat. Dit is onjuist:

$10 - 3 + 2 = (10 - 3) + 2 = 7 + 2 = 9,$ en *niet*
$10 - 3 + 2 = 10 - (3 + 2) = 10 - 5 = 5.$

Als van bovengenoemde volgorde moet worden afgeweken, en ook in gevallen van twijfel, wordt de volgorde met haakjes, accoladen en haken aangegeven.

$10 - (3 + 2) = 10 - 5 = 5.$

Voor $16 : 4 : 2$ schrijve men liever $(16 : 4) : 2$.

Wat betreft de voorrang van worteltrekking en logaritmeneming t.o.v. elkaar, is de schrijfwijze doorslaggevend.

$^2\log \sqrt{64} = {}^2\log 8 = 3.$

$\sqrt{^2\log 512} = \sqrt{9} = 3.$

Onthoud:

$^p\log a \times b$ is het produkt van $^p\log a$ en b.
$^p\log ab$ is de p-log van het produkt van a en b.
$\sqrt{4} + 21 = 2 + 21 = 23.$
$\sqrt{(4 + 21)} = \sqrt{25} = 5.$
$\sqrt{4 + 21} = \sqrt{25} = 5.$
$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p]{(\sqrt[q]{a})} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}.$
$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$
$^a\log {}^b\log c = {}^a\log({}^b\log c).$
$^a\log^n b = ({}^a\log b)^n.$

DEFINITIE VAN NUL

§68. In §4 spraken we over verzamelingen, die minstens één element bevatten. We nemen nu aan dat een verzameling bestaat, die geen element bevat.

Deze verzameling (hoeveelheid) noemen we de *nulhoeveelheid.* Per definitie wordt het aantal elementen van deze hoeveelheid aangeduid met het teken 0 (noem dit teken 'nul'). Ook dit teken noemen we een getal.

Nul is dus niet een natuurlijk getal.

We breiden het getalbegrip uit en voegen het getal 0 aan de natuurlijke getallen toe.

De nieuwe groep getallen (de natuurlijke getallen, 0 en de later in te voeren negatieve gehele getallen) noemen we de *gehele getallen.*

Dus elk natuurlijk getal is een geheel getal. 0 is wel een geheel getal, niet een natuurlijk getal.

NUL ALS MODULUS VAN DE OPTELLING

§69. Uit de definitie van 0 in §68 volgt, dat

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

(Een verzameling verandert namelijk niet door toevoeging van de nulhoeveelheid.)

Eveneens geldt:

$$(a + b) + 0 = a + b + 0 = a + (b + 0).$$

Daar nu de commutatieve en associatieve eigenschap van de optelling ook geldt voor een som met een term 0 (ook $0 + 0 = 0$), gelden die eigenschappen voor de gehele getallen. Zolang de negatieve getallen niet zijn ingevoerd, bedoelen we met de gehele getallen de natuurlijke getallen en nul.

Hieruit volgt, dat de eigenschappen van de aftrekking (dit zijn alle afgeleide eigenschappen) ook gelden voor de gehele getallen.

We moeten nu echter aan de aftrekking de eis stellen, dat het aftrektal niet kleiner is dan de aftrekker;

$a + 0 = a$, dus $a - a = 0$; $a - 0 = a$.

De som van twee termen, waarvan één nul is, is gelijk aan de andere term: $a + 0 = a$; $0 + a = a$.

Deze eigenschap heet de *moduluseigenschap van de optelling*. 0 is de *modulus* van de optelling.

Opmerking: We hadden het getal 0 ook kunnen invoeren zonder de nulhoeveelheid te definiëren; dan hadden we $0 + a = a + 0 = a$, en $(a + b) + 0 = a + b + 0 = a + (b + 0)$ als definitie moeten geven.

ANDERE BEWERKINGEN MET NUL

§70. Zonder dat we dit hier volledig zullen nagaan zij meegedeeld, dat ook de andere grondeigenschappen blijven gelden voor de gehele getallen.

Dit betekent ten aanzien van:

a. de vermenigvuldiging:

$0 \times a = a \times 0 = 0$;
$a \times 0 \times b = (a \times 0) \times b = 0$.

Een produkt is dan en dan alleen nul, als minstens één van de factoren nul is.

b. de deling:
$0 : a = 0$;

$a : 0$ is *niet gedefinieerd* (bestaat niet); er is geen getal dat vermenigvuldigd met 0 a oplevert;
$0 : 0 = p$ (p is willekeurig, want $0 \times p = 0$). $0 : 0$ is dus *onbepaald*.

c. de machtsverheffing:
$0^a = 0$;
$a^0 = 1$ $(1 = a^p : a^p = a^{p-p} = a^0)$.

We spreken af:
$0^0 = 1$; dus in $0^a = 0$ is $a \neq 0$.

d. de worteltrekking:

$\sqrt[p]{0} = 0 \quad (p \neq 0)$;

$\sqrt[0]{a}$ is niet gedefinieerd voor $a \neq 1$;

$\sqrt[0]{1}$ is onbepaald, want $a^0 = 1$;

e. de logaritmeneming:

${}^a\log 1 = 0$.

${}^a\log 0$ is niet gedefinieerd;

Als grondtal van een logaritme worden 0 en 1 niet geaccepteerd.

HET GRONDTAL

§71. g is een getal groter dan 1.
$a, b, c, d, e, f, \ldots$ zijn gehele getallen kleiner dan g.

Nu is elk natuurlijk getal op één en niet meer dan één wijze voor te stellen door:

$\ldots f\,e\,d\,c\,b\,a$ (waarbij onder de getallen $a, b, c, d, e, f, \ldots$ twee of meer gelijke kunnen voorkomen).

Met $\ldots f\,e\,d\,c\,b\,a$ bedoelen we het getal dat gelijk is aan

$$a \times g^0 + b \times g^1 + c \times g^2 + d \times g^3 + e \times g^4 + f \times g^5 + \ldots$$

De getallen $a, b, c, d, e, f, \ldots$ (kleiner dan g) waarmee we een getal aanduiden, noemen we *cijfers*.

g heet het *grondtal* van het *talstelsel*, dat gebruikt wordt. Het talstelsel is door de keuze van g bepaald.

a is het cijfer van de eenheden;
b is het cijfer van de g-tallen;
c is het cijfer van de g^2-tallen.

De machten van g, namelijk $g^0 = 1$; g; g^2; g^3; g^4; g^5;... noemen we de *termen van de schaal*.

Indien we met $c\,b\,a$ bedoelen aan te geven het getal, dat gelijk is aan $a + bg + cg^2$, geven we dit liever aan met $|\overline{c\,b\,a}|$ (tenminste indien niet elke letter door een van onze cijfers is vervangen); dit ter voorkoming van verwarring met $c \times b \times a$, dat we kunnen schrijven als cba.

$|\overline{c\,b\,a}|$ is voor

$a = 3$	:	$|\overline{c\,b\,3}|$
$a = 3, b = 2$	:	$|\overline{c\,2\,3}|$
$a = 3, b = 2, c = 1$	:	123.

Het teken $|\overline{\quad}|$ is het *ilatieteken*.

Door bovengenoemd systeem is het mogelijk de rij van de natuurlijke getallen onbeperkt ver op te schrijven.

§72. In ons talstelsel is g tien ($g = 10$ is nietszeggend, want in elk systeem is $g = 10$; immers 10 betekent $0 \times g^0 + 1 \times g = 0 \times 1 + 1 \times g = 0 + g = g$).

Met $\overline{|c\ b\ a|}$ bedoelen we $a + b \times 10$ (tien) $+ c \times 10^2$.

10 — tien
$10^2 = 100$ — honderd
$10^3 = 1000$ — duizend
10^6 — miljoen
10^9 — duizend miljoen of miljard
10^{12} — biljoen
10^{18} — triljoen
10^{24} — quadriljoen
10^{30} — quintiljoen.

Het getal 5/703478/256034/058241 spreken we als volgt uit: (we verdelen het getal eerst in groepjes van 6 cijfers, bij het laatste cijfer rechts beginnend)

vijf triljoen zevenhonderdendrieduizend vierhonderdenachtenzeventig biljoen tweehonderdzesenvijftigduizend vierendertig miljoen achtenvijftigduizend tweehonderdeenenveertig.

In het getal 5753 heeft de zeven (7) de waarde 7×10^2 (tien kwadraat).

We noemen t.a.v. het cijfer 7:

700 de *werkelijke waarde*;
7 de *volstrekte waarde*;
10^2 de *betrekkelijke waarde*.

Daar in ons systeem de waarde van een cijfer in een getal onder meer afhangt van de *plaats* van dat cijfer, is ons systeem een zogenaamd *positiestelsel*.

In ons tientallig stelsel zijn nodig en voldoende tien *cijfers* (dit zijn tevens de tien gehele getallen, die kleiner dan tien zijn), nl.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9.

In het algemeen gebruiken we bij een van 0 verschillend getal niet 0 als eerste (meest links staande) cijfer. In bijzondere gevallen verdient het aanbeveling dit wel toe te staan, bijv. bij

kilometerteller, kasregister. We bedoelen dan met $\overline{0\;0\;c\;b\;a}$ $\rightarrow$ $\overline{c\;b\;a}$, d.w.z.

$0\;1\;2 = 12;$

$0\;0\;3\;5\;8 = 358.$

HET ACHTTALLIG EN TWEETALLIG STELSEL

§73. Het aantal vingers van beide handen heeft zeer waarschijnlijk geleid tot het gebruik van het grondtal tien in ons talstelsel. Wezens met totaal acht vingers (de kabouters van Walt Disney's Sneeuwwitje!) zouden, indien ze ons systeem volgden, de volgende rij van natuurlijke getallen hebben:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, ...,

waarbij hun 10 (spreek uit: een-nul) correspondeert met onze acht, vandaar dat wij hun systeem het *achttallig stelsel* noemen (8-tallig is zinloos; ook het *acht*tallig stelsel is 10-tallig).

Een bladzijde van een rekenboekje uit een wereld met het achttallig stelsel kan het volgende bevatten:

$1 \times 4 = 4$	$1 \times 5 = 5$
$2 \times 4 = 10$	$2 \times 5 = 12$
$3 \times 4 = 14$	$3 \times 5 = 17$
$4 \times 4 = 20$	$4 \times 5 = 24$
$5 \times 4 = 24$	$5 \times 5 = 31$
$6 \times 4 = 30$	$6 \times 5 = 36$
$7 \times 4 = 34$	$7 \times 5 = 43$
$10 \times 4 = 40$	$10 \times 5 = 50.$

De 'tafelprodukten' van de tafel van 4 vormen een eenvoudig systeem, omdat 4 de helft van 10 is. Merk op, dat ook daar vermenigvuldigen met 10 (een-nul) betekent, dat een 0 achter het getal geplaatst wordt.

Bij gebruikmaking van het achttallig stelsel moet men beschikken over acht cijfers nl. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7.

Het kleinste aantal cijfers heeft men nodig in het *tweetallig* stelsel. Het aantal cijfers is daar twee; men moet beschikken over 0 en 1. Een nadeel bij het uitschrijven van getallen in dit talstelsel is, dat de getallen al gauw uit veel cijfers gaan bestaan.

Ter vergelijking hebben we onderstaande rij stippen geteld

en respectievelijk de in het tientallig, achttallig en tweetallig stelsel te gebruiken natuurlijke getallen er onder geschreven:

	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
tientallig	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
achttallig	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
tweetallig	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

	•	•	•	•	•	•
tientallig	11	12	13	14	15	16
achttallig	13	14	15	16	17	20
tweetallig	1011	1100	1101	1110	1111	10000

In elektronische rekenmachines wordt tijdens het rekenen het tweetallig stelsel toegepast in verband met het feit, dat hierbij slechts twee cijfers nodig zijn (corresponderende met het *wel* en *niet* ontvangen van een elektronische impuls).

HERLEIDEN VAN EEN GETAL VAN EEN *g*-TALLIG STELSEL ($g \neq$ TIEN) NAAR HET TIENTALLIG STELSEL

§74. Het getal 52064 (zeventallig stelsel) is, geschreven in het zeventallig stelsel, gelijk aan:

$$4 + 6 \times 10 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 5 \times 10^4;$$

dat is geschreven in het tientallig stelsel

$$\begin{aligned} & 4 + 6 \times 7 + 0 \times 7^2 + 2 \times 7^3 + 5 \times 7^4 = \\ & = 4 + 42 + 0 + 686 + 12005 = \\ & = 12737. \end{aligned}$$

Dus 52064 (zeventallig stelsel) = 12737 (tientallig stelsel).

Het getal 52064 (zeventallig stelsel) is, geschreven in het tientallig stelsel:

$$\begin{aligned} &= \underbrace{5 \times 7^4 + 2 \times 7^3}_{} + 0 \times 7^2 + 6 \times 7 + 4 = \\ &= \underbrace{37 \times 7^3 \qquad + 0 \times 7^2}_{} + 6 \times 7 + 4 = \\ &= \underbrace{259 \times 7^2 \qquad + 6 \times 7}_{} + 4 = \\ &= \underbrace{1819 \times 7 \qquad + 4}_{} = \\ &= 12737. \end{aligned}$$

Deze bewerking kunnen we kort als volgt opschrijven (zie ook §79):

```
52064
7::::
—::::
37:::
 7:::
———::
259::
  7::
————:
1819:
   7:
—————
12737
```

HERLEIDEN VAN EEN GETAL VAN HET TIENTALLIG STELSEL NAAR EEN g-TALLIG STELSEL ($g \neq$ TIEN)

§75. Moet het getal 25905 (geschreven in het tientallig stelsel) worden omgezet in het zestallig stelsel, dan delen we het getal door 6 (zie hiervoor §80).

25905 : 6 — quotiënt 4317 rest 3;

het getal bevat dus 4317 zestallen en 3 eenheden.

4317 : 6 — quotiënt 719 rest 3;

er zijn dus 717 6^2-tallen en 3 zestallen.

719 : 6 — quotiënt 119 rest 5;
119 : 6 — quotiënt 19 rest 5;
19 : 6 — quotiënt 3 rest 1.

D.w.z. $25905 = 3 \times 6^5 + 1 \times 6^4 + 5 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 3 \times 6 + 3$.

In het zestallig stelsel geschreven wordt het tweede lid:

$3 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10 + 3$

wat we schrijven als

315533.

Dus 25905 (tientallig stelsel) = 315533 (zestallig stelsel).

We kunnen deze bewerking als volgt noteren:

6 | 25905
6 | 4317 rest 3
6 | 719 rest 3
6 | 119 rest 5
6 | 19 rest 5
6 | 3 rest 1.

OVERGANG VAN SCHRIJFWIJZE IN HET *g*-TALLIG STELSEL NAAR HET *h*-TALLIG STELSEL

§76. Indien *g* en *h* beide ongelijk aan tien zijn, kan deze transformatie geschieden door het getal, geschreven in het *g*-tallig stelsel, eerst te herleiden tot een getal, geschreven in het tientallig stelsel (zie §74), en daarna dit getal volgens de methode ontwikkeld in §75 om te zetten in het *h*-tallig stelsel.

Als we 5311 (zeventallig stelsel) moeten omzetten in het twaalftallig stelsel gaat dit als volgt:
(bedenk, in het twaalftallig stelsel zijn twaalf cijfers; we nemen hiervoor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *t*, *e*)

5311
7
38
7
267 5311 (zeventallig stelsel) = 1870 (tientallig stelsel)
7
1870

Bij deze bewerking, die is uitgevoerd in het tientallig stelsel, hebben we 5311 ongewijzigd bovenaan kunnen plaatsen, omdat de cijfers van het zeventallig stelsel corresponderen met de cijfers 0 t/m 6 van ons tientallig stelsel (zie ook het volgende voorbeeld; van twaalftallig stelsel naar zeventallig stelsel).

Nu herleiden we 1870 (tientallig stelsel) tot een getal in het twaalftallig stelsel:

12 | 1870
12 | 155 rest 10; echter 10 (tient. st.) = *t* (twaalft. st.)
12 | 12 rest 11; 11 (tient. st) = *e* (twaalft. st.)
1 rest 0.

We hebben de bewerking uitgevoerd in het tientallig stelsel, maar schrijven het getal in het twaalftallig stelsel met gebruikmaking van de cijfers van het twaalftallig stelsel, dus als 10*et*.

5311 (zeventallig stelsel) = 10*et* (twaalftallig stelsel).

Wanneer we volgens dezelfde methode 10*et* (twaalftallig stelsel) omzetten in een getal in het zeventallig stelsel krijgen we 10*et*, waarbij *e* in ons stelsel 11 is en *t* 10, dus

1	0	11	10
12	:	:	:
1	2	:	:
	12	:	:
1	5	5	:
		12	:
1	8	7	0

7	1870	rest 1
7	267	rest 1
7	38	rest 3
	5	

dus 10*et* (twaalftallig stelsel) = 5311 (zeventallig stelsel).

IV. UITVOERING VAN DE BEWERKINGEN

Hieronder volgen de methoden waarop de bewerkingen meestal worden uitgevoerd.

Bij deze rekenmethoden (algoritmen) nemen we aan dat ze worden uitgevoerd in het tientallig stelsel.

ALGORITME VAN DE OPTELLING

§77. We onderscheiden de volgende gevallen:

A. Het bepalen van de som van getallen, die elk uit één cijfer bestaan. Deze som kan eenvoudig worden bepaald met de definitie van optellen. Een overzicht van al deze sommen noemen we de *tafel van optelling*. Deze sommen kenne men uit het hoofd.

■	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

B. Alle overige optellingen:

$315 + 74 = 315 + 074 =$
$= (300 + 10 + 5) + (0 + 70 + 4) =$
$= 300 + 10 + 5 + 0 + 70 + 4 =$
$= 300 + 0 + 10 + 70 + 5 + 4 =$
$= (300 + 0) + (10 + 70) + (5 + 4).$

Dit wordt meestal volgens onderstaande algoritme uitgevoerd.

$$\begin{array}{r} 315 \\ 74 \\ \hline 389 \end{array} +$$

Hierbij beginnen we de kolomsgewijze optelling met de rechterkolom. Als van een kolom (behalve de meest linkse) de som meer dan 9 is, schrijft men van deze som de eenheden onder de kolom en voegt de rest (uitgedrukt in *aantal* tientallen) bij de volgende (links ervan staande) kolom ('onthouden').

Dus:

$$\begin{array}{r} 294 \\ 378 \\ \hline 672 \end{array} +$$

1e kolom: $4 + 8 = 12$; 2 opschrijven, 1 'onthouden'.
2e kolom: $1 + 9 + 7 = 17$; 7 opschrijven, 1 'onthouden'.
3e kolom: $1 + 2 + 3 = 6$; 6 opschrijven.

Zonder de 0 te schrijven, lezen we het geval

$$\begin{array}{r} 315 \\ 74 \\ \hline \end{array} + \quad \text{als} \quad \begin{array}{r} 315 \\ 074 \\ \hline \end{array} +.$$

Dat we in het tientallig stelsel gemakkelijk optellen, terwijl dit voor ons in een ander talstelsel met grote moeilijkheden gepaard gaat, vindt zijn oorzaak in het feit, dat we de uitkomsten van de tafel van optelling uit het hoofd kennen.

Bovengenoemde methode kan uitgebreid worden bij een som van meer dan twee getallen, bijv.

$$\begin{array}{r} 9547 \\ 308 \\ 1532 \\ 3682 \\ \hline 15069 \end{array} +$$

Bij een dergelijke optelling in het vijftallig stelsel moeten we beschikken over de tafel van optelling in het vijftallig stelsel.

1	2	3	4	
2	3	4	10	1
3	4	10	11	2
4	10	11	12	3
10	11	12	13	4

Een optelling in het vijftallig stelsel ziet er bijvoorbeeld zo uit:

$$\begin{array}{r} 4\,0\,2\,1 \\ 3\,1\,3 \\ 4\,3\,1\,3\,3 \\ \hline 1\,0\,3\,0\,2\,2 \end{array} +$$

1e kolom: $1 + 3 + 3 = 12$; 2 opschrijven, 1 onthouden.
2e kolom: $1 + 2 + 1 + 3 = 12$; 2 opschrijven, 1 onthouden.
3e kolom: $1 + 0 + 3 + 1 = 10$; 0 opschrijven, 1 onthouden.
4e kolom: $1 + 4 + 3 = 13$; 3 opschrijven, 1 onthouden.
5e kolom: $4 + 1 = 10$; opschrijven.

ALGORITME VAN DE AFTREKKING

§78. We hebben hierbij de volgende gevallen:

A. De aftrekker is een getal van één cijfer, het aftrektal is zodanig, dat het verschil een getal is van één cijfer.
In dit geval kan het verschil worden afgelezen uit de tafel van optelling; door veel oefening kent men de gevallen van buiten.

B. Aftrektal en aftrekker zijn willekeurige getallen.
Hierbij passen we de volgende eigenschap toe:

$$(a + b + c) - (p + q + r) = (a - p) + (b - q) + (c - r).$$

Deze eigenschap is direct af te leiden uit $_1$A.

Moeten we 8571 verminderen met 3251, dan splitsen we de getallen als volgt:

$$\begin{array}{l} 8571 = 8000 + 500 + 70 + 1 \\ 3251 = 3000 + 200 + 50 + 1 \\ \hline \qquad\quad 5000 + 300 + 20 + 0 \end{array} - \quad = 5320.$$

Er ontstaat zo deze vorm:

$$\begin{array}{r} 8571 \\ \underline{3251} \\ 5320 \end{array} -$$

De kolomsgewijze aftrekking geschiedt van rechts naar links, d.w.z. we beginnen bij de rechterkolom.

Zonder de 0 te schrijven, lezen we het geval

$$\begin{array}{r} 852 \\ \underline{31} \end{array} - \quad \text{als} \quad \begin{array}{r} 852 \\ \underline{031} \end{array} - .$$

Als bij een kolom de aftrekking onmogelijk is doordat het bovenste cijfer kleiner is dan het daaronderstaande, vermindert men het links van het bovenste cijfer staande cijfer met 1, waardoor het te kleine getal (cijfer) met 10 vermeerderd wordt, zodat het zeker groot genoeg wordt. Men noemt dit '*lenen*'.

Indien men bij dit 'lenen' links van het bovenste cijfer een 0 vindt, 'leent' men eerst nog een plaats verder, waardoor de 0 10 wordt.

Voorbeeld:

$$\begin{array}{r} 20526 \\ \underline{8673} \\ 11853 \end{array} -$$

1e kolom: (rechts) 6 — 3 = 3; opschrijven.
2e kolom: (eerst lenen) 12 — 7 = 5; opschrijven.
3e kolom: (eerst lenen, niet van 0, maar van 10) 14 — 6 = 8; opschrijven.
4e kolom (de 0 is eerst 10 geworden, door lenen van 2; daarna door lenen aan rechtse cijfer 9) 9 — 8 = 1; opschrijven.
5e kolom: (2 is door lenen aan 0 1 geworden) 1 — 0 = 1; opschrijven.

ALGORITME VAN DE VERMENIGVULDIGING

§79. Hierbij onderscheiden we vier gevallen:

A. Beide factoren zijn getallen van één cijfer.

Deze produkten zijn te bepalen met behulp van de definitie van produkt: $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$.

We vinden ze in de *tafel van vermenigvuldiging*. Het is de bedoeling, dat men deze tafel van vermenigvuldiging uit het hoofd kent.

■	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

B. De eerste factor is een getal van één cijfer; de tweede factor is willekeurig.

$7 \times 346 = 7 \times (300 + 40 + 6) =$ V22
$= 7 \times 300 + 7 \times 40 + 7 \times 6 =$
$= 7 \times 3 \times 100 + 7 \times 4 \times 10 + 7 \times 6 =$
$= 21 \times 100 + 28 \times 10 + 42 =$
$= 2100 + 280 + 42.$

We voeren dit als volgt uit (van rechts naar links):

$$\begin{array}{r} 346 \\ \underline{7} \\ 2422 \end{array} \times$$

$7 \times 6 = 42$; we schrijven de 2 op en voegen de 4 (tientallen) bij de 28 (7×4) tientallen; van de zo gevormde 32 schrijven we de 2 op en tellen de 3 (honderdtallen) op bij de 21 (7×3) honderdtallen.

C. De eerste factor is een getal dat bestaat uit een cijfer groter dan 0, gevolgd door één of meer nullen. Bijv. 300×26.

$300 \times 26 =$
$= 3 \times 100 \times 26 =$
$= 3 \times 26 \times 100 =$
$= 78 \times 100 = 7800.$

Men krijgt dus het produkt, door het produkt van 3×26 te laten volgen door twee nullen.

D. Beide factoren willekeurig.

$348 \times 253 =$
$= (300 + 40 + 8) \times 253 =$
$= 300 \times 253$ (zie C) $+ 40 \times 253$ (zie C) $+ 8 \times 253$.

We krijgen zo de volgende algoritme:

```
  253
  348
 ----  ×
 2024
10120
75900
-----
88044
```

Op de eerste regel 2024, berekend volgens de methode van geval B.

Op de tweede regel plaatsen we eerst rechts een 0 (in verband met conclusie genoemd onder C) en plaatsen daarvóór het produkt van 4 en 253 (berekend volgens de methode van geval B).

Op de derde regel plaatsen we eerst twee nullen (rechts) en links daarvan het produkt van 3 en 253. Daarna wordt opgeteld.

De getallen op de eerste (2024), tweede (10120) en derde (75900) regel heten de *gedeeltelijke produkten.*

Als we de methode van geval D consequent toepassen ontstaat, als de onderste factor een 0 bevat, de volgende vorm:

```
   825
   307
  ----  ×
  5775
  0000
247500
-------
253275.
```

In dit geval laten we de tweede regel weg; hierbij moeten we wel bedenken, dat daardoor de tweede regel (die eigenlijk de derde is) bij de plaatsing van de nullen een extra nul krijgt:

$$
\begin{array}{r}
825 \\
307 \\
\hline
5775 \\
247500 \\
\hline
253275
\end{array}
\times
$$

Het is mogelijk bovenstaande algoritme nog aanmerkelijk te wijzigen, waardoor minder moet worden genoteerd. Zie voor de verkorte vermenigvuldiging §230 e.v.

ALGORITME VAN DE OPGAANDE EN NIET-OPGAANDE DELING

§80. We maken hierbij geen onderscheid tussen verhoudingsdeling en verdelingsdeling.

De volgende gevallen worden hierbij onderscheiden:

A. De deler bestaat uit één cijfer; het deeltal is een zodanig getal, dat het (partiële) quotiënt ook uit één cijfer bestaat.

Voor zover het bij dit geval opgaande delingen betreft, vinden we de quotiënten in de tafel van vermenigvuldiging.

Bij een niet-opgaande deling, bijv. 57 : 8, zoeken we in de tafel van vermenigvuldiging bij de produkten met factor 8 naar dat produkt, dat kleiner dan 57 is en minder dan 8 van 57 verschilt.

In dit voorbeeld is dat 56, zodat het partiële quotiënt 7 is. De rest is 1.

$57 = 8 \times 7 + 1.$

B. De deler bestaat uit meer dan één cijfer; het deeltal is zó, dat het quotiënt een getal van één cijfer is.

Bijv. 3254 : 418.

Het partiële quotiënt is zeker kleiner dan 10, want
$10 \times 418 = 4180$ en $4180 > 3254$.
We bepalen nu het getal a ($a < 10$), waarvoor geldt
$a \times 418 \leqslant 3254$ (met $\leqslant$ bedoelen we kleiner dan of gelijk aan) en $(a + 1) \times 418 > 3254$.

Dit bepalen van a is in eerste instantie een kwestie van schatten; het geschatte quotiënt wordt genoteerd. Na vermenigvul-

diging blijkt uit de rest of het geschatte quotiënt gewijzigd moet worden.

In ons geval noteren we de gang van zaken op de volgende wijze:

```
418 / 3254 \ 7
      2926
      ----
       328
```

Het is hier duidelijk te zien dat het partiële quotiënt niet 8 is.

$8 \times 400 = 3200$ en $8 \times 18 > 54$.

Het produkt 7×418 wordt onmiddellijk onder 3254 geplaatst; daarna wordt het verschil (de rest) bepaald.

C. Het quotiënt is een getal van meer dan één cijfer.

We maken hierbij gebruik van

$(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d$ (af te leiden uit D_7).

57 / 42832 \

De deler bevat twee cijfers. Daarom proberen we 57 te delen op het getal gevormd door de eerste twee cijfers (42). Daar we een quotiënt groter dan 0 eisen, nemen we nu de eerste *drie* cijfers.

428 : 57 → quotiënt 7 rest 29.

We noteren:

```
57 / 42832 \ 700
     399
     ---
      293
```

We schrijven voor het quotiënt 7 700 omdat het honderdtallen betreft.

Daarna delen we de 29 honderdtallen vermeerderd met de 3 tientallen (= 293 tientallen) door 57.

293 : 57 → quotiënt 5 rest 8.

Dit noteren we als volgt:

```
57 / 42832 \ 700
     399      50
     ---
      293
      285
      ---
        8
```

Tenslotte delen we de resterende 8 tientallen, vermeerderd met 2 eenheden (82), door 57, en vinden een niet-opgaande deling met quotiënt 1 en rest 25.

We hebben dan zo gekregen:

```
57 / 42832 \ 700
     399      50
     ---
      293      1
      285
      ---
        82
        57
        --
        25
```

Dit betekent dus dat we het getal $42832 - 25 = 42807$ als volgt hebben gesplitst:

$$42807 = 39900 + 2850 + 57.$$
$$42807 : 57 =$$
$$= (39900 + 2850 + 57) : 57 =$$
$$= 39900 : 57 + 2850 : 57 + 57 : 57 =$$
$$= 700 + 50 + 1 = 751;$$

dus

$$42832 = 57 \times 751 + 25$$

in overeenstemming met de reeds eerder gevonden eigenschap (§42),

deeltal = deler × quotiënt + rest.

We schrijven bovenstaande deling meestal in onderstaande, nog verder verkorte, vorm op:

```
57 / 42832 \ 751
     399 ::
     ---
      293 :
      285 :
      ---
        82
        57
        --
        25
```

We kunnen hierbij ook het volgende geval krijgen:

```
32 / 9773 \ 305
     96::
     ——
      17:
      00:
      ——
      173
      160
      ———
       13
```

dat we bekorten tot

```
32 / 9773 \ 305
     96::
     ——
      173
      160
      ———
       13
```

Dit betekent dus dat, als we in het quotiënt een 0 krijgen, onmiddellijk het volgende cijfer van het deeltal wordt 'aangehaald'.

MACHTSVERHEFFING

§81. Voor de machtsverheffing heeft men geen speciaal algoritme. De betekenis van de machtsverheffing is dan ook niet, dat door een eigen algoritme een produkt met gelijke factoren sneller zou kunnen worden bepaald, maar wel, dat de schrijfwijze van de macht ons in staat stelt zeer grote getallen die produkten zijn van gelijke factoren, op eenvoudige wijze te schrijven.

Zo is:

$$10^{10^{10}} = 10^{10\,000\,000\,000};$$

dit is het getal, dat we schrijven als 1, gevolgd door tienduizend miljoen nullen.

Als men dit getal zou opschrijven, dag en nacht doorwerkend, met een snelheid van 3 nullen per seconde, zou men ongeveer een eeuw nodig hebben.

§82. We behandelen in dit boek alleen de algoritme van de tweedemachtsworteltrekking. Hierbij onderscheiden we de volgende gevallen:

A. De wortel (tweedemachtswortel) is een getal van één cijfer. Het getal waaruit de wortel getrokken moet worden (dit getal heet *radicandus*) is dan een getal van één of twee cijfers. De worteltrekkingen behorende bij dit geval kennen we uit het hoofd, daar deze wortels af te lezen zijn van de tafel van vermenigvuldiging.

Alle radicandi van één of twee cijfers zijn in onderstaande tabel te vinden op de diagonale rij van links-boven naar rechts-beneden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2		4							
3			9						
4				16					
5					25				
6						36			
7							49		
8								64	
9									81

B. De wortel is een getal van twee cijfers. (De radicandus heeft dus drie of vier cijfers want als een getal g bestaat uit twee cijfers geldt: $10 \leqslant g < 100$, dus $10^2 \leqslant g^2 < 100^2$; $100 \leqslant g^2 < 10\,000$; elk getal, kleiner dan 10 000 en groter dan 99 bestaat uit drie of vier cijfers).

De wortel heeft dan de gedaante $|\overline{ab}|$, d.w.z. de waarde is $10a + b$.

$(10a + b)^2 = (10a + b)(10a + b) =$ V3

$= (10a + b) \times 10a + (10a + b) \times b =$

$= 100a^2 + 10ab + 10ab + b^2 =$

$= 100a^2 + 20ab + b^2.$

Voorbeeld:

$$27^2 = 729$$

$$729 = 100 \times 2^2 + 20 \times 2 \times 7 + 7^2$$

We hebben dan de volgende algoritme:

$$\sqrt{7\,|\,29} =$$

We verdelen het getal in twee delen (streep tussen het cijfer van de honderdtallen en de tientallen).

Het grootste kwadraat dat van 7 afgetrokken kan worden, is $2^2 = 4$; deze 4 plaatsen we onder de 7.

Tevens plaatsen we de 2 rechts van het gelijkteken.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{7\,|\,29} = 2 \\ 2 \times 2 = & \ \ 4 \\ \hline & \ \ 3\ 29 \end{array}$$

We hebben nu, na 'aanhalen' van 29 het getal 329. Deze

$$\begin{aligned} 329 &= 20 \times 2 \times b + b^2 = \\ &= 40b + b^2 = \\ &= 40 \times b + b \times b = \\ &= (40 + b) \times b = \\ &= \overline{4b} \times b. \end{aligned}$$

We plaatsen dus links naast 329 (één regel lager) 4 . × . , waarin de 4 het dubbele is van de pas gevonden 2. Op de plaats van de punten komt hetzelfde cijfer.

De notatie van de gehele algoritme is dan:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{7\,|\,29} = 2\dot{7} \\ 2 \times 2 & = 4 \\ \hline & \ \ 3\ 29 \\ 4\dot{7} \times \dot{7} = & \ \ 3\ 29 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

C. De wortel is een getal met meer dan twee cijfers.

Dit is een uitbreiding van het vorige geval; het aantal honderdtallen is nu een getal van meer dan één cijfer, en dit getal vinden we door het aantal honderdtallen ook te verdelen (rechts beginnend) in groepen van twee cijfers.

Er ontstaat dan bijv. het volgende:

$$\sqrt{3|01|02|25} = 1735$$

$1 \times 1 =$	1	
	2 01	
$27 \times 7 =$	1 89	de 2 op deze regel is het dubbele van de gevonden 1.
	12 02	
$343 \times 3 =$	10 29	34 is het dubbele van 17.
	1 73 25	
$3465 \times 5 =$	1 73 25	346 is het dubbele van 173.
	0	

Als de wortel een getal is dat het cijfer 0 bevat, onderscheiden we twee gevallen.

1. Het laatste cijfer is een 0.
 In dat geval zijn de laatste twee cijfers van de radicandus nullen.

$$\sqrt{15|21|00} = 390$$

$3 \times 3 =$	9
	6 21
$69 \times 9 =$	6 21
	0 00
$780 \times 0 =$	0
	0

Dit verkorten we tot

$$\sqrt{15|21|00} = 390$$

$3 \times 3 =$	9
	6 21
$69 \times 9 =$	6 21
	0

We plaatsen achter de 39 één nul, omdat de radicandus nog één groepje van twee nullen heeft.

2. De wortel bevat een nul, echter niet als laatste cijfer.

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt{9|12|04} = 3\underset{\cdot}{0}\underset{\cdot}{2} \\
3 \times 3 = & 9 \\
\cline{2-2}
 & 12 \\
6\underset{\cdot}{0} \times \underset{\cdot}{0} = & 0 \\
\cline{2-2}
 & 12\ 04 \\
60\underset{\cdot}{2} \times \underset{\cdot}{2} = & 12\ 04 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Dit verkorten we tot

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt{9|12|04} = 3\underset{\cdot}{0}\underset{\cdot}{2} \\
3 \times 3 = & 9 \\
\cline{2-2}
 & 12\ 04 \\
6\underset{\cdot}{0}\underset{\cdot}{2} \times \underset{\cdot}{0}\underset{\cdot}{2} = & 12\ 04 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Indien bij deze algoritme het laatste verschil niet 0 is, hebben we de *partiële vierkantswortel* gevonden; deze partiële vierkantswortel uit een getal is dus het grootste natuurlijke getal waarvan het kwadraat kleiner is dan dat getal.

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt{3|17} = 1\underset{\cdot}{7} \\
1 \times 1 = & 1 \\
\cline{2-2}
 & 2\ 17 \\
2\underset{\cdot}{7} \times \underset{\cdot}{7} = & 1\ 89 \\
\cline{2-2}
 & 28
\end{array}
$$

, dus 17 is de partiële vierkantswortel uit 317.

V. DEELBAARHEID

DELERS

§83. Als $a = p \cdot d$ is, heet d een *deler* van a.

Hierbij zijn a en p gehele getallen; d is een natuurlijk getal.

7 is een deler van 14, want $14 = 2 \times 7$.

9 is een deler van 0, want $0 = 0 \times 9$.

De eis, dat de deler van een getal een natuurlijk getal is, sluit het getal 0 als deler uit. Zonder deze voorwaarde zou 0 een deler van 0 zijn, want $0 = 5 \times 0$.

De volgende uitdrukkingen zijn synoniem:

d is een deler van a,
a is deelbaar door d,
d is deelbaar op a,
a is een veelvoud van d,
a is een d-voud.

Een getal, dat door 2 deelbaar is, noemen we *even.*

Een getal, dat niet door 2 deelbaar is, heet *oneven.*

Complementaire delers van een getal zijn twee delers, waarvan het produkt gelijk is aan dat getal. 2 en 7 zijn complementaire delers van 14; 1 en 14 ook.

Bij het opschrijven van de delers van een getal doen we dit bij voorkeur door daarbij op de complementaire delers te letten. Als we bijvoorbeeld de delers van 24 moeten opschrijven, noteren we eerst 1 en 24, daarna 2 en 12. Dit geeft het voordeel dat we geen getal tussen 12 en 24 behoeven te onderzoeken. Er is nl. geen getal tussen 12 en 24 dat deler van 24 is; van zo'n deler zou de complementaire deler een getal tussen 2 en 1 zijn. Voor de delers van 24 en de delers van 36 krijgen we dan de volgende staatjes:

24	
1	24
2	12
3	8
4	6

36	
1	36
2	18
3	12
4	9
6	

Vaak zetten we de delers in één kolom, waardoor de overzichtelijkheid (echter niet t.a.v. de complementaire delers) wordt vergroot.

24
1
2
3
4
6
8
12
24

We zien uit het bovenstaande tevens, dat een kwadraatgetal één deler heeft die complementair is met zichzelf. Hieruit kunnen we concluderen, dat een niet-kwadraatgetal een even aantal delers en een kwadraatgetal een oneven aantal delers heeft.

Elk getal heeft als complementaire delers de getallen 1 en het getal zelf. Bij het getal 1 is dit één getal, namelijk 1.

Als een getal nog andere delers dan 1 en het getal zelf heeft, noemen we deze delers *echte delers*.

Een *echte deler* van een getal is een deler, groter dan 1 en kleiner dan het getal.

10 heeft de delers 1, 2, 5 en 10. Daarvan zijn alleen de delers 2 en 5 echt.

7 heeft geen echte delers.

DEELBARE GETALLEN EN PRIEMGETALLEN

§84. Een *deelbaar getal* is een getal, dat echte delers heeft.

Een *priemgetal* is een getal, groter dan 1, dat geen echte delers heeft.

We hebben de gehele getallen op deze wijze in drie groepen verdeeld, nl.

het getal 1;
de priemgetallen;
de deelbare getallen.

Dezelfde indeling ontstaat als we bij de definiëring letten op het aantal delers:

a. het getal 1 heeft één en niet meer dan één deler;
b. een priemgetal is een getal met twee en niet meer dan twee delers;
c. een deelbaar getal is een getal met meer dan twee delers.

EIGENSCHAPPEN VAN DE DEELBAARHEID

§85.

Eig. Db_1. Als *a* deelbaar is door *b*, en *b* deelbaar door *c* is, volgt hieruit: *a* is deelbaar door *c*.

Gegeven: $a = k \cdot b$ *k* is een geheel getal
$b = l \cdot c$ *l* is een natuurlijk getal, omdat $b \neq 0$.
Te bewijzen: *a* is deelbaar door *c*.

Bewijs:

$$a = k \cdot b = k \cdot (lc) = (kl) \cdot c \qquad \text{(Eig. } V_{22}\text{)}$$

dus is *a* deelbaar door *c*.

Deze eigenschap Db_1 kunnen we ook als volgt onder woorden brengen:

Een deler van een getal is een deler van elk veelvoud van dat getal.
Een veelvoud van een veelvoud van een getal is een veelvoud van dat getal.
Een deler van een deler van een getal is een deler van dat getal.

Een *gemene* (gemeenschappelijke) *deler* van twee of meer getallen is een getal, dat deler van elk van die getallen is.

§86.

Eig. Db_2. Een gemene deler van twee of meer getallen is een deler van de som van die getallen.

We geven het bewijs voor drie getallen.
Gegeven:

$a = k \cdot d$
$b = l \cdot d$ *k*, *l* en *m* zijn gehele getallen.
$c = m \cdot d$

Te bewijzen: $a + b + c$ is deelbaar door d.
Bewijs:

$$a = k \cdot d.$$
$$b = l \cdot d$$
$$c = m \cdot d$$
$$a + b + c = kd + ld + md = (k + l + m) \cdot d.$$

Door kb te beschouwen als de som van twee of meer gelijke termen b, kunnen we eigenschap Db_1 als een bijzonder geval van eigenschap Db_2 beschouwen; in dit geval geldt voor k, dat $k \neq 0$ is.

Voor eigenschap Db_1 en het bewijs daarvan geldt die beperking niet.

§87.

Eig. Db_3. Een gemene deler van twee getallen is een deler van het verschil van die getallen.

Gegeven: $a = k \cdot d$
$b = l \cdot d \qquad b \leqslant a$; k en l zijn gehele getallen.
Te bewijzen: $a - b$ is deelbaar door d.
Bewijs:

$$a = kd$$
$$b = ld$$
$$a - b = kd - ld = (k - l)d$$

dus $a - b$ is deelbaar door d.

§88.

Eig. Db_4. Als van twee getallen het ene wel, het andere niet door een zelfde getal deelbaar is, is hun som niet deelbaar door dat getal.

We bewijzen dit uit het ongerijmde:

Als a een p-voud en b geen p-voud is, is $a + b$ geen p-voud. Immers, als $a + b$ wèl deelbaar was door p, dan zou, volgens Db_3, $(a + b) - a$, dus b deelbaar zijn door p, en dit is in strijd met het gegeven.

Eig. Db_5. Als van twee getallen het ene wel, het andere niet door een zelfde getal deelbaar is, is hun verschil niet deelbaar door dat getal.

Stel $a \geqslant b$.

a. Is a een p-voud en b geen p-voud, dan is $a - b$ geen p-voud. Was $a - b$ wèl een p-voud, dan zou, omdat a een p-voud is, b ($b = a - (a - b)$) volgens eigenschap Db_3 ook een p-voud zijn, en dit is in strijd met het gegeven.

b. Is a geen p-voud en b wel een p-voud, dan is $a - b$ geen p-voud. Zou $a - b$ wèl een p-voud zijn, dan zou, omdat b een p-voud is, a ($a = (a - b) + b$) volgens Db_2 ook een p-voud zijn, wat in strijd is met het gegeven.

§89.

Eig. Db_6. Van n opvolgende getallen is één en niet meer dan één deelbaar door n.

Bewijs: n opvolgende getallen zijn voor te stellen door

$$k + 1; \quad k + 2; \quad k + 3; \quad \ldots; k + n \quad (k \text{ geheel}).$$

Als $k + 1$ niet deelbaar door n is, geeft deling van $k + 1$ door n een niet-opgaande deling met een van 0 verschillende rest r ($r < n$).

De rest bij deling van $k + 2$ door n is, als de deling niet-opgaand is, $r + 1 < n$.

Als alle getallen $k + 1$ tot en met $k + n$ niet deelbaar door n zouden zijn, zouden alle resten van de niet-opgaande delingen groter dan 0 en kleiner dan n zijn. Bovendien zouden bij deze resten geen gelijke zijn. Er zijn $n - 1$ verschillende getallen groter dan 0 en kleiner dan n, dus bovengenoemd resultaat is onmogelijk, d.w.z. zeker één van de getallen $k + 1$ tot en met $k + n$ geeft bij deling door n een opgaande deling, dus minstens een van de n opvolgende getallen is een n-voud.

Dat slechts één getal van n opvolgende getallen deelbaar door n is, volgt uit het feit, dat het verschil van twee willekeurige getallen (die niet gelijk zijn) van $k + 1$ tot en met $k + n$ groter dan 0 en kleiner dan n is; zo'n verschil is dus niet deelbaar door n. Is een getal van de rij $k + 1$ tot en met $k + n$ deelbaar door n – hierboven is aangetoond dat zo'n getal bestaat – dan is het verschil met een ander getal uit de rij niet deelbaar door n. Volgens eigenschap Db_5 is dat andere getal niet deelbaar door n.

n opvolgende getallen bevatten dus één en niet meer dan één n-voud.

Van twee opvolgende getallen is dus één even; het andere getal is oneven:

$\underline{0}$ 1 $\underline{2}$ 3 $\underline{4}$ 5 $\underline{6}$ 7 $\underline{8}$ 9 $\underline{10}$ 11

Van drie opvolgende getallen is één een drievoud, de andere getallen zijn geen drievouden:

$\underline{0}$ 1 2 $\underline{3}$ 4 5 $\underline{6}$ 7 8 $\underline{9}$ 10 11

Eigenschap Db_6 betekent tevens, zoals door genoemde voorbeelden wordt geïllustreerd, dat in de rij van de natuurlijke getallen de n-vouden om de n getallen voorkomen, d.w.z. dat tussen twee opvolgende n-vouden $n - 1$ getallen voorkomen.

Van twee opvolgende even getallen is één en niet meer dan één deelbaar door 4.

Bewijs:

We stellen de opvolgende even getallen voor door $2n$ en $2n + 2$.

$2n$; $2n + 1$; $2n + 2$; $2n + 3$ zijn vier opvolgende getallen, waarvan één en niet meer dan één een 4-voud is. $2n + 1$ en $2n + 3$ zijn oneven getallen; deze zijn dus volgens eig. Db_1 niet deelbaar door 4, dus is één en niet meer dan één van de getallen $2n$ en $2n + 2$ een 4-voud.

Dit betekent, dat men in de rij van de even getallen afwisselend een viervoud en een niet-viervoud tegenkomt.

$\underline{0}$ 2 $\underline{4}$ 6 $\underline{8}$ 10 $\underline{12}$ 14 $\underline{16}$ 18 $\underline{20}$ 22

PRIEMGETALLEN

§90.

Definitie: Een priemgetal is een getal met twee en niet meer dan twee delers.

Het getal 1 wordt dus niet tot de priemgetallen gerekend; zou men 1 wèl tot de priemgetallen rekenen, dan zou bij verscheidene van de volgende eigenschappen het getal 1 toch moeten worden uitgesloten.

Eig. Db_7. Elk getal, groter dan 1, is door minstens één priemgetal deelbaar.

Bewijs: $a > 1$.

Als a geen echte delers heeft, is a zelf priem, deelbaar door a, dus deelbaar door een priemgetal. Is a niet een priemgetal, dan heeft a de echte deler b, die zelf priem is of deelbaar is door een echte deler c. Daar de getallen a, b, c ... steeds kleiner worden stuit men, zo doorgaande, ten slotte op een priemgetal, dat dan, volgens Db_1 een deler van a is.

§91. Euclides (die ong. 300 v. Chr. in Alexandrië leefde) noemde reeds in zijn hoofdwerk *Elementen* de volgende eigenschap van de rij van de priemgetallen:

Eig. Db_8. Er bestaat geen grootste priemgetal.

Dit betekent dus dat, als p een priemgetal is, een priemgetal groter dan p bestaat.

Men brengt dit ook als volgt wel onder woorden:

Het aantal priemgetallen is oneindig.

Bewijs: Stel p is het grootste priemgetal. Dan is het produkt van alle natuurlijke getallen niet groter dan p (we stellen dit produkt voor door $p!$ – spreek uit: p faculteit) deelbaar door elk priemgetal.

$p! + 1$ is door geen van de getallen tot en met p, dus door geen priemgetal, deelbaar. Dit is een ongerijmdheid, daar volgens Db_7 ieder getal groter dan 1 door een priemgetal deelbaar is.

Opmerking: Als p het grootste (grootst bekende) priemgetal is, hadden we in plaats van $p!$ ook kunnen nemen het produkt van alle priemgetallen niet groter dan p; noem dit produkt A.

$A + 1$ is dus zelf een priemgetal of te ontbinden in nog onbekende priemfactoren die groter dan p zijn.

Voorbeeld: De priemgetallen niet groter dan 19 zijn:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

$2 + 1 = 3$ 3 is priem

$2 \times 3 + 1 = 7$ 7 is priem

$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$ 31 is priem

$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$ 211 is priem

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2311$ 2311 is priem

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$

59 en 509 zijn priemgetallen.

§92. Er is geen formule bekend, die uit de priemgetallen tot en met p de volgende doet vinden.

Vele wiskundigen hebben zich met het zoeken naar zo'n formule beziggehouden. Zo heeft Fermat in 1640 als mening uitgesproken dat $2^{2^m} + 1$ voor elke gehele waarde van m priem is.

Inderdaad is:

voor $m = 0$: $2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$ priem
voor $m = 1$: $2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ priem
voor $m = 2$: $2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$ priem
voor $m = 3$: $2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$ priem
voor $m = 4$: $2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537$ priem
voor $m = 5$: $2^{32} + 1 = 4294967296 + 1 = 4294967297$
$= 641 \times 6700417$

Voor $m = 5$ ontstaat al een deelbaar getal, zodat de mening van Fermat onjuist blijkt, wat door Euler (1707-1783), een van de grootste wiskundigen, is aangetoond.

De priemgetallen van de vorm $2^{2^m} + 1$ noemt men priemgetallen van Fermat.

De zeef van Eratosthenes

§93. Om de priemgetallen te vinden die niet groter dan bijv. 100 zijn, maakt men gebruik van een methode, die bekend staat onder de naam: zeef van Eratosthenes (Eratosthenes, Grieks wiskundige, vriend van Pythagoras, omstreeks 250 v. Chr.).

Allereerst schrijft men op het getal 2 en alle oneven getallen groter dan 2 en kleiner dan 100, in volgorde van klein naar groot. Het getal 1 en de even getallen groter dan 2 kunnen worden weggelaten, omdat ze alle niet priem zijn. Daarna schrapt men de 3-vouden, die niet priem zijn, d.w.z. alle drievouden behalve 3. Daar 2×3 even is en dus niet is opgeschreven, begint men te schrappen bij $3^2 = 9$; de volgend te schrappen 3-vouden staan steeds drie plaatsen verder. De 4-vouden komen niet voor, omdat alle 4-vouden even zijn. Nu schrapt men de 5-vouden, die niet priem zijn, dus te beginnen bij $5^2 = 25$.

Daarna de 7-vouden schrappen, te beginnen met $7^2 = 49$ en

daarna steeds het 7 plaatsen verder staande getal (de 6-vouden zijn niet opgeschreven omdat ze even zijn).

De 8-, 9- en 10-vouden zijn niet opgeschreven of al geschrapt omdat het 2- of 3-vouden zijn.

Nu moeten de 11-vouden, behalve 11, geschrapt; daar 2×11, 3×11, 4×11 ... tot en met 10×11 niet opgeschreven of al geschrapt zijn, omdat het 2-, 3-, 5- of 7-vouden zijn, beginnen we te schrappen bij $11^2 = 121$. Dit getal ligt buiten het te onderzoeken gebied, dus alle niet geschrapte getallen zijn priem.

Opmerking: Bij deze manier van schrappen gebeurt het dus wel, dat een reeds geschrapt getal nogmaals wordt geschrapt, bijv. 35 wordt als 5-voud en later als 7-voud geschrapt.

Tenslotte ontstaat het volgende resultaat:

2	3	5	7	~~9~~	11	13	~~15~~	17	19	~~21~~	23
~~25~~	~~27~~	29	31	~~33~~	~~35~~	37	~~39~~	41	43	~~45~~	47
~~49~~	~~51~~	53	~~55~~	~~57~~	59	61	~~63~~	~~65~~	67	~~69~~	71
73	~~75~~	~~77~~	79	~~81~~	83	~~85~~	~~87~~	89	~~91~~	~~93~~	~~95~~
97	~~99~~										

ONTBINDING IN PRIEMFACTOREN

§94.

Eig. Db_9. Elk getal groter dan 1 is op één en niet meer dan één manier als produkt van priemgetallen te schrijven (de volgorde van de factoren wordt hierbij buiten beschouwing gelaten). (Fundamenteel-eigenschap)

Bewijs: Stel $a = p^2 \times q^3 \times r$ (p, q en r zijn priemgetallen; $r < q < p$)

Als nu ook $a = e \times f \times g \times h \times j \times k \times l$ (e, f, g, h, j, k, l zijn niet-deelbare getallen; $l \leqslant k \leqslant j \leqslant h \leqslant g \leqslant f \leqslant e$)

geldt dus:

$$p^2 \times q^3 \times r = e \times f \times g \times h \times j \times k \times l.$$

Het eerste lid is deelbaar door p, dus het tweede lid ook. Daar de factoren van het tweede lid niet-deelbare getallen zijn, is dus een der factoren gelijk aan p (zie eig. Db_{24}); p is de grootste priemdeler van het eerste, dus van het tweede lid: stel $p = e$.

Na deling van beide leden door p krijgt men:

$$p \times q^3 \times r = f \times g \times h \times j \times k \times l.$$

Een zelfde redenering als bovenstaande geeft:

$$p = f; \quad q = g = h = j; \quad r = k \quad \text{zodat} \quad l = 1 \quad \text{(een).}$$

Opmerking: Hoewel bovenstaand bewijs gegeven is voor een getalvoorbeeld (de exponenten zijn 2, 3 en 1) is duidelijk, dat deze bewijsvoering voor elk geval geldt. Eig. Db_{24} steunt niet op Db_9 of daaruit afgeleide eigenschappen.

Indien we een getal moeten ontbinden in priemfactoren, beginnen we te onderzoeken of het getal deelbaar is door 2; indien dit niet het geval is, onderzoeken we de deelbaarheid door 3; zo gaan we door, steeds met het volgende priemgetal. Als we een priemdeler gevonden hebben, delen we het getal door deze priemdeler en onderwerpen het quotiënt aan eenzelfde onderzoek. Dit herhalen we zó vaak tot we het quotiënt 1 verkregen hebben. We noteren dit in onderstaande vorm:

	1980
2	990
2	495
3	165
3	55
5	11
11	1

dus $1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$.

§95.

Eig. Db_{10}. Van twee getallen is het ene dan en dan alleen deelbaar door het andere, als bij ontbinding van beide getallen in priemfactoren in het eerste getal alle priemfactoren van het andere getal voorkomen met dezelfde of grotere exponent.

1. Gegeven: $a = p^e \times q^f \quad b = p^g \times q^f$ (p en q zijn priem; $e > g$).

Bewijs: $a = p^e \times q^f = p^{e-g} \times (p^g \times q^f) = k \times b$.

Dus a is deelbaar door b.

2. Gegeven: a is deelbaar door b.

Bewijs:

a is deelbaar door b, dus $a = k \times b$.

Ontbinden we beide leden in priemfactoren, dan hebben we aan beide kanten dezelfde priemfactoren, dus de priemfactoren van a zijn dezelfde als die van k en b samen, d.w.z. a heeft alle priemfactoren van b met dezelfde of hogere exponent.

Opmerking: Hoewel de redenering van het eerste gedeelte van het bewijs voor een bijzonder geval is gegeven (a heeft twee verschillende priemfactoren), is de redenering voor elk ander geval analoog.

In 1. is bewezen dat de voorwaarde – voorkomen van de priemfactoren met dezelfde of hogere exponent – *voldoende* is; in 2. is bewezen, dat de voorwaarde *nodig* is.

HET AANTAL DELERS VAN EEN GETAL

§96.

Eig. Db_{11}. Het aantal delers van een getal is gelijk aan het produkt van de met één vermeerderde exponenten van de machten van het in priemfactoren ontbonden getal.

Dit wil zeggen: als $n = a^p \cdot b^q \cdot c^r$ (a, b, c priem)
dan is het aantal delers van n:

$$(p + 1)(q + 1)(r + 1).$$

Bewijs: Elke deler van $n = a^p \cdot b^q \cdot c^r$ bevat slechts de factoren a, b en c met dezelfde of lagere exponent als in $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ (hierbij is ook de exponent 0 toegestaan).

Elke deler van n kan ontstaan gedacht worden door uit elk van de onderstaande rijen één element te nemen en van deze elementen het produkt te nemen.

a^0; a^1; a^2; a^3; $a^4 \ldots a^p$
b^0; b^1; b^2; b^3; $b^4 \ldots b^q$
c^0; c^1; c^2; c^3; $c^4 \ldots c^r$

Het aantal combinaties van elementen uit eerste, tweede en derde rij is $(p + 1)(q + 1)(r + 1)$.
Dus het aantal delers is $(p + 1)(q + 1)(r + 1)$.

Opmerking: Bovenstaand bewijs, dat voor drie verschillende priemdelers is gegeven, laat zich gemakkelijk uitbreiden met een willekeurig aantal verschillende priemfactoren.

Daar een kwadraatgetal bij ontbinding in priemfactoren slechts even exponenten heeft, zijn alle met 1 vermeerderde exponenten in dat geval oneven, waaruit volgt, dat een kwadraatgetal een oneven aantal delers heeft (zie ook §83).

HET PRODUKT VAN ALLE DELERS VAN EEN GETAL

§97. Als het getal g n delers heeft, is n even als g geen kwadraatgetal is, en oneven, als g wel een kwadraatgetal is.

1. g is geen kwadraatgetal.
 Er zijn $n : 2$ groepen complementaire delers; het produkt van de delers van elke groep is g. Het produkt van alle delers is: $g^{(n:2)}$.

2. g is een kwadraatgetal.
 Daar n oneven is, zijn er $(n - 1) : 2$ groepen complementaire delers en de deler $\sqrt{g}$.
 Het produkt van al deze delers is $g^{(n-1):2} \times \sqrt{g} =$
 $= \{(\sqrt{g})^2\}^{(n-1):2} \times \sqrt{g} = (\sqrt{g})^{\{(n-1):2\}\times 2} \times \sqrt{g} =$
 $= (\sqrt{g})^{n-1} \times \sqrt{g} = (\sqrt{g})^n = \sqrt{g^n}$

Daar $g^{n:2}$ ook te schrijven is als $\sqrt{g^n}$, geldt dus in het algemeen dat het getal g met n delers, delers heeft waarvan het produkt is: $\sqrt{g^n}$.

DE GROOTSTE GEMENE DELER (G.G.D.)

§98. Een gemene deler van twee getallen is een getal, dat deler is van beide getallen.

Twee getallen hebben altijd 1 als gemene deler.
Definitie: twee getallen heten onderling ondeelbaar of relatief priem als ze geen andere gemene deler dan 1 hebben.

Definitie: De G.G.D. (grootste gemene deler) van twee getallen is het grootste getal dat op beide deelbaar is.

Om de G.G.D. te bepalen kunnen we, vooral bij kleine getallen, alle delers opschrijven en de gemeenschappelijke aanstrepen.

Bijvoorbeeld:

24	36
1	1
2	2
3	3
4	4
6	6
8	9
12	12
24	18
	36

De G.G.D. van 24 en 36 is 12.

20	35
1	1
2	5
4	7
5	35
10	
20	

De G.G.D. van 20 en 35 is 5.

De eerste definitie van deze paragraaf kan ook als volgt luiden:

Twee getallen zijn onderling ondeelbaar (relatief priem) als hun G.G.D. 1 is.

Onderling ondeelbaar zijn bijvoorbeeld:

7 en 9	319 en 321
6 en 35	n en $n + 1$ (n geheel).

Twee opvolgende getallen zijn onderling ondeelbaar, immers een gemene deler is een deler van hun verschil; daar het verschil 1 is, is alleen 1 als gemene deler mogelijk.

Voor het bepalen van de G.G.D. van grote getallen is de methode, genoemd in deze paragraaf, te tijdrovend. Om tot een algoritme voor de bepaling van de G.G.D. (ook van grote getallen) te komen, bewijzen we eerst de volgende eigenschap:

§99.

Eig. Db$_{12}$. De G.G.D. van twee getallen is tevens de G.G.D. van één van die getallen en het verschil van het andere getal en een willekeurig veelvoud van het eerste getal.

Te bewijzen: De G.G.D. van a en b is gelijk aan de G.G.D. van b en $a - kb$ (als $kb \leqslant a$) en:

de G.G.D. van a en b is gelijk aan de G.G.D. van b en $pb - a$ (als $a \leqslant pb$).

Bewijs:

Zij d een gemene deler van a en b, dan is d een deler van a en van b, dus van kb (van pb), dus ook van $a - kb$ (van $pb - a$).

Zij e een gemene deler van b en $a - kb$ (b en $pb - a$), dan is e een deler van b, dus van kb (van pb) en ook van $a - kb$ (van $pb - a$), dus ook van de som van kb en $a - kb$ (het verschil van pb en $pb - a$), dus van a.

a en b hebben dus dezelfde gemene delers als b en $a - kb$ (b en $pb - a$), dus hebben ze dezelfde G.G.D.

Opmerking: Voor het bewijs van het tweede deel van het te bewijzen leze men in plaats van de lettervormen vóór de haakjes de lettervormen tussen de haakjes.

§100. In verband met de volgende algoritme voor de bepaling van de G.G.D. van twee getallen, brengen we een bijzonder geval van eigenschap Db_{12} als volgt onder woorden:

Eig. Db_{12}'. De G.G.D. van deler en deeltal is gelijk aan de G.G.D. van deler en rest.

Dit geldt zowel voor een niet-opgaande als voor een opgaande deling; bedenk, dat de G.G.D. van a ($a \neq 0$) en 0 a is (immers 0 is deelbaar door a).

Voor de bepaling van de G.G.D. hebben we nu de volgende algoritme, de zgn. *algoritme van Euclides* (omstreeks 300 v. Chr.):

Als we de G.G.D. van 675 en 730 moeten bepalen, delen we 675 op 730

$$\begin{array}{l} 675/730\backslash 1 \\ \quad\underline{675} \\ \quad\;\; 55 \end{array}$$

Dit geeft een niet-opgaande deling met rest 55. Volgens eig. Db_{12}' is de gezochte G.G.D. (van 675 en 730) dezelfde als die van 55 en 675. Daarom delen we nu 55 op 675

```
55/675\12
   55
   125
   110
    15
```

Hieruit volgt, dat de gezochte G.G.D. gelijk is aan de G.G.D. van 15 en 55.

Nu krijgen we een deling met deler 15 en deeltal 55. Dit zetten we voort (dus rest en deler van een deling zijn respectievelijk deler en deeltal van de volgende deling) tot een opgaande deling de algoritme afsluit. Deze opgaande deling verschijnt stellig, daar de resten, en dus de delers, steeds kleiner worden en dus, als niet al eerder een opgaande deling is verschenen, tenslotte de rest (deler van de volgende opgaande deling) 1 is.

De deler van de laatste (opgaande) deling is de gezochte G.G.D., want de G.G.D. van die deler en de rest (0) is die deler zelf.

De algoritme wordt nu in de volgende vorm geschreven:

```
675/730\1
    675
     55/675\12
         55
         125
         110
          15/55\3
             45
             10/15\1
                10
                 5/10\2
                   10
                    0
```

Ter bekorting van de algoritme en in verband met eigenschap Db_{12} verdient het vaak aanbeveling het ‘quotiënt’ 1 groter te nemen. Vergelijk hieronder beide methoden:

```
37/362\9                              37/362\10
   333                                   370
    29/37\1                                8/37\5
       29                                    40
        8/29\3                                3/8\3
          24                                    9
           5/8\1                                1/3\3
             5                                    3
             3/5\1                                0
               3
               2/3\1
                 2
                 1/2\2
                   2
                   0
```

§101.

Eig. Db_{13}. Een gemene deler van twee getallen is een deler van hun G.G.D.

Bewijs: Bij het bewijs van eig. Db_{12} is aangetoond, dat een gemene deler van deeltal en deler een gemene deler is van deler en rest. Daar dit bij de algoritme van Euclides voor elke deling geldt, is dus een gemene deler van twee getallen, bij bepaling van de G.G.D. met het algoritme van Euclides, ook gemene deler van rest en deler van de laatste deling, dus deler van de G.G.D.

§102. Een derde methode om de G.G.D. te bepalen volgt uit de eigenschap:

Eig. Db_{14}. De G.G.D. van twee getallen is gelijk aan het (gedurig) produkt van de machten van de gemeenschappelijke priemfactoren van die getallen, waarbij de macht van elke priemfactor tot exponent heeft de kleinste van de exponenten van de machten van diezelfde factor welke in die getallen voorkomen.

We lichten dit met een getallenvoorbeeld toe:

$$a = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$
$$b = 2 \times 3^4 \times 5$$

De G.G.D. is $2 \times 3^2 \times 5$.

Dat $2 \times 3^2 \times 5$ een deler van a en van b is, volgt uit eigenschap Db_{10}. Als $2 \times 3^2 \times 5$ niet de grootste gemene deler van a en b zou zijn, was dit getal een deler van de G.G.D.; dan zou aan het produkt $2 \times 3^2 \times 5$ nog minstens één priemfactor moeten worden toegevoegd om de G.G.D. te krijgen. Dit nieuwe produkt zou dan echter volgens eig. Db_{10} niet van a en b beide een deler zijn, zodat $2 \times 3^2 \times 5$ inderdaad de G.G.D. is.

§103. De begrippen gemene deler en G.G.D. kunnen gemakkelijk worden uitgebreid over meer dan twee getallen.

De bepaling van de G.G.D. van meer dan twee getallen gaat met de methode van §102 als volgt:

Bepaal de G.G.D. van 60, 504, en 1980.

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$
$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$
$$1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

De G.G.D. $= 2^2 \times 3 = 12$.

Indien we de methode van Euclides toepassen, bepalen we eerst de G.G.D. van twee getallen en daarna de G.G.D. van het derde getal en de gevonden G.G.D.

```
60/504\8                12/1980\165
   480                      12
   ---                      --
    24/60\2                  78
       48                    72
       --                    --
       12/24\2                60
          24                  60
          --                  --
           0                   0
```

De G.G.D. is 12.

Als g de G.G.D. is van a en b, is elke gemene deler van a, b en c een gemene deler van a en b, dus een deler van g, dus een gemene deler van g en c.

Elke gemene deler van g en c is een deler van g, dus een gemene deler van a en b, dus een gemene deler van a, b en c.

Hieruit volgt, dat *a*, *b* en *c* dezelfde G.G.D. hebben als *g* en *c*, wat we in bovenstaande algoritme hebben toegepast.

§104. Daar een gemene deler van twee getallen een deler is van hun verschil, is de G.G.D. van twee getallen een deler van hun verschil.

Dit stelt ons in staat de G.G.D. van twee getallen die weinig verschillen, op eenvoudige wijze te bepalen.

Voorbeeld: Bepaal de G.G.D. van 713 en 723.

Het verschil van 713 en 723 is 10, dus de G.G.D. van 713 en 723 is een deler van 10.

Daar 713 niet deelbaar door 5 en niet deelbaar door 2 is (zie kenmerken van deelbaarheid voor 5 en 2, §119) is de G.G.D. 1.

713 en 723 zijn onderling ondeelbaar.

§105. Als men van *a* en *b* de G.G.D. bepaalt met behulp van de algoritme van Euclides, waarbij alle delingen, met uitzondering van de laatste, niet-opgaande delingen zijn (de verkorte algoritme - zie §100 - wordt hier niet gebruikt), volgt hieruit, dat de G.G.D. van *ka* en *kb* *k* maal de G.G.D. van *a* en *b* is.

Voor elke deling van de algoritme geldt eigenschap D_9: als men deeltal en deler met *k* vermenigvuldigt, wordt de rest met *k* vermenigvuldigd. Van elke volgende deling is dus de deler *k* maal zo groot, dus de G.G.D. is *k* maal zo groot.

Eig. Db_{15}. Als men twee getallen met hetzelfde getal vermenigvuldigt, wordt hun G.G.D. met dat getal vermenigvuldigd.

In de andere richting gelezen, geeft dit de eigenschap:

Eig. Db_{16}. Als men twee getallen door hetzelfde getal deelt, wordt hun G.G.D. door dat getal gedeeld.

Een bijzonder geval van eig. Db_{16} kan als volgt worden geformuleerd:

Eig. Db_{17}. Als men twee getallen door hun G.G.D. deelt, zijn de quotiënten onderling ondeelbaar.

§106.

Eig. Db_{18}. Als *a* onderling ondeelbaar is met *b*, is *a* ook onderling ondeelbaar met een deler van *b*.

Bewijs: Stel $b = k \times c$.
Als *a* en *c* onderling deelbaar zouden zijn, zouden *a* en *c* bij ontbinding in priemfactoren één of meer gelijke priemfactoren hebben. Dan zouden *a* en *kc*, dus *a* en *b* die ook hebben, en dat is in strijd met het gegeven.

§107.

Eig. Db_{19}. Als een produkt van twee factoren deelbaar is door een getal dat onderling ondeelbaar is met één van de factoren, dan is dat getal een deler van de andere factor.

Gegeven: $a \times b$ is deelbaar door *c*.
a en *c* zijn onderling ondeelbaar.
Te bewijzen: *b* is deelbaar door *c*.
Bewijs:
De G.G.D. van *a* en *c* is 1 (gegeven).
De G.G.D. van $a \times b$ en $c \times b$ is *b* (eig. Db_{15}).
$a \times b$ is deelbaar door *c* (gegeven).
$c \times b$ is deelbaar door *c*.
c is een gemene deler van $a \times b$ en $c \times b$, dus een deler van hun G.G.D. (eig. Db_{13}), dus *c* is een deler van *b*.

§108.

Eig. Db_{20}. Als men van twee getallen één van de getallen vermenigvuldigt met een getal dat onderling ondeelbaar is met het andere getal, verandert de G.G.D. niet.

Gegeven: De G.G.D. van *a* en *b* is *g*.
a is onderling ondeelbaar met *k*.
Te bewijzen: De G.G.D. van *a* en $k \times b$ is *g*.
Bewijs: Een gemene deler van *a* en *b* is deler van *b*, dus van *kb*, dus gemene deler van *a* en *kb*.
Een gemene deler van *a* en *kb* is deler van *kb*; omdat *a* en *k* onderling ondeelbaar zijn, zijn deze deler en *k* ook onderling ondeelbaar (eig. Db_{18}) en is deze deler een deler van *b* (eig. Db_{19}), dus een gemene deler van *a* en *b*.
a en *b* en de getallen *a* en $k \times b$ hebben dezelfde gemene delers, dus dezelfde G.G.D.

§109.

Eig. Db_{21}. Als een getal onderling ondeelbaar is met twee andere getallen, is het getal onderling ondeelbaar met het produkt van die getallen.

Gegeven: a en c zijn onderling ondeelbaar.
b en c zijn onderling ondeelbaar.
Te bewijzen: ab en c zijn onderling ondeelbaar.
Bewijs:
De G.G.D. van a en c is 1 (gegeven).
Omdat b onderling ondeelbaar met c is, is de G.G.D. van $a \times b$ en c ook 1 (eig. Db_{20}).
Deze eigenschap is uit te breiden tot:

Eig. Db_{22}. Als een getal onderling ondeelbaar is met enige getallen, is dat eerste getal onderling ondeelbaar met het produkt van die getallen.

Uit eig. Db_{22} volgt, dat als a onderling ondeelbaar is met b, a^p onderling ondeelbaar is met b; en hieruit volgt weer, dat a^p onderling ondeelbaar is met b^q.

Eig. Db_{23}. Als twee getallen onderling ondeelbaar zijn, zijn machten van deze getallen ook onderling ondeelbaar.

§110.

Eig. Db_{24}. Als een (gedurig) produkt deelbaar is door een priemgetal, is minstens één van de factoren deelbaar door dat priemgetal.

We bewijzen dit uit het ongerijmde:
Gegeven is: $a \times b \times c \times d \ldots$ is deelbaar door p (p is priem).
Als geen der factoren deelbaar was door p, dan was elke factor onderling ondeelbaar met p, dus volgens eig. Db_{22} het produkt onderling ondeelbaar met p. Dit is in strijd met het gegeven.

§111.
Gegeven: $4a = 5\text{-voud} + 2$.
Te bewijzen $a^2 - a - 6 = 50\text{-voud}$.
Bewijs: $4a = 5\text{-voud} + 2 = 5\text{-voud} + 12 = 5 \cdot k + 12$.
$4a$ en 12 zijn deelbaar door 4, dus $5k$ is deelbaar door 4. (eig. Db_3)
5 en 4 zijn onderling ondeelbaar, dus k is deelbaar door 4

(eig. Db_{19}); stel $k : 4 = p$.

$4a = 5k + 12$; beide leden delen door 4.

$a = 5p + 3$.

$a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2)$; hierin $a = 5p + 3$ substitueren geeft:

$a^2 - a - 6 = 5p \cdot (5p + 5) = 5p \cdot 5(p + 1) = 25\, p\, (p + 1)$.

p en $p + 1$ zijn twee opvolgende getallen, dus een ervan is deelbaar door 2.

Dus $25\, p\, (p + 1)$ is deelbaar door 25 en door 2, dus door 50.

INDICATOR VAN *n*

§112.

Definitie: Onder de indicator van n, aangeduid door $\varphi(n)$, verstaat men het aantal natuurlijke getallen dat onderling ondeelbaar is met n en niet groter is dan n.

Zo blijkt uit het volgende overzicht $\varphi(42) = 12$.

1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~
~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~
~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~
~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~

De getallen van $\varphi(42)$ zijn dus:

1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37 en 41.

$\varphi(42)$ is hier bepaald door uit de rij der natuurlijke getallen van 1 t/m 42 de getallen die onderling deelbaar zijn met 42 (in dit geval de veelvouden van de priemfactoren 2, 3 en 7 van 42) te schrappen.

Enige voorbeelden:

$\varphi(24) = 8$
$\varphi(9) = 6$
$\varphi(2) = 1$
$\varphi(1) = 1$

Een algemene manier om $\varphi(n)$ te bepalen berust op de methode, die hierboven voor $\varphi(42)$ is toegepast.

Beschouwen we een getal van de gedaante

$n = a^p b^q c^r$ (a, b en c zijn priem).

In de rij van de natuurlijke getallen tot en met n schrappen we de getallen die onderling deelbaar zijn met n. Dit zijn de veelvouden van a, b en/of c.

In de genoemde getallenrij bevinden zich $\frac{n}{a}$ a-vouden, $\frac{n}{b}$ b-vouden en $\frac{n}{c}$ c-vouden.

Wordt door deze getallen een streep gezet, dan blijken een aantal getallen meer dan één keer te zijn doorgestreept, namelijk die getallen, die zowel a-voud als b-voud zijn, of zowel a-voud als c-voud zijn, of zowel b-voud als c-voud zijn. Dit zijn respectievelijk $\frac{n}{ab}$, $\frac{n}{ac}$, $\frac{n}{bc}$ getallen, die dus 'een keer teveel' geschrapt zijn.

Verminderen we de n oorspronkelijke getallen met de veelvouden van a, b en c die zojuist zijn bepaald, dan blijven over:

$n - \frac{n}{a} - \frac{n}{b} - \frac{n}{c} + \frac{n}{ab} + \frac{n}{ac} + \frac{n}{bc}$, waarbij nog moet worden gelet op de getallen, die zowel een veelvoud van a, b als c zijn. Deze zijn namelijk in eerste instantie driemaal doorgeschrapt als a-, b-, en c-voud, maar ook driemaal bijgeteld als ab-, ac-, en bc-voud, zodat eliminatie van die getallen alsnog moet volgen. Hun aantal is $\frac{n}{abc}$.

$$\text{Dus: } \varphi(n) = n - \frac{n}{a} - \frac{n}{b} - \frac{n}{c} + \frac{n}{ab} + \frac{n}{ac} + \frac{n}{bc} - \frac{n}{abc}.$$

$$\textbf{Eig. I}_1. \ \varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

Voor een getal met meer dan drie priemfactoren ontstaat de formule en verloopt het bewijs op analoge wijze.

In het algemeen geldt: Als n de priemfactoren p_i ($i = 1$ t/m k) heeft, dan is

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Met de tweede factor in bovenstaand produkt wordt bedoeld het produkt van alle factoren van de gedaante $(1 - \frac{1}{p})$, waarin p achtereenvolgens de waarden $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ aanneemt.

$$\text{Zo is bijv. } \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Toepassing van de formule:

$\varphi(35) = 35 \cdot (1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7}) = 24.$
$\varphi(60) = 60 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 16.$
$\varphi(42) = 42 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{7}) = 12.$

Opmerkingen:

1. Als p priem is, dan is $\varphi(p) = p - 1$.
2. Als $n > 2$, dan is $\varphi(n)$ even;
 is namelijk een getal $k < n$ onderling ondeelbaar met n, dan is het getal $n - k$ volgens eig. Db 2 ook onderling ondeelbaar met n.
 De getallen van $\varphi(n)$ komen dus in tweetallen voor die niet gelijk kunnen zijn; immers, dan zou $k = n - k$ zijn, dus $k = \frac{1}{2}n$, zodat k in dat geval een deler van n was.
3. $\varphi(2n) = \varphi(n)$ als n oneven is.

$$\begin{cases} \varphi(2n) = 2n\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)(\ldots) \\ \varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)(\ldots) \end{cases}$$

$\varphi(2n) = \varphi(n)$.

Eig. I2. De indicator van een getal dat de priemfactoren a en b heeft, is gelijk aan het produkt van de indicatoren van de getallen die worden gevormd door de priemfactoren a en de priemfactoren b.
In formule: $\varphi(a^p \cdot b^q) = \varphi(a^p) \cdot \varphi(b^q)$.

Bewijs:

$$\varphi(a^p \cdot b^q) = a^p \cdot b^q \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) =$$
$$= a^p \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot b^q \cdot \left(1 - \frac{1}{b}\right) =$$
$$= \varphi(a^p) \cdot \varphi(b^q).$$

In §96 werd ten behoeve van het onderzoek naar het aantal delers van $n = a^p \cdot b^q \cdot c^r$ (a, b en c priem) het volgende schema opgesteld:

$$\begin{matrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \ldots & a^p \\ 1 & b & b^2 & b^3 & \ldots & b^q \\ 1 & c & c^2 & c^3 & \ldots & c^r \end{matrix}$$

Elke deler van n wordt verkregen als het produkt van één der getallen uit elk van de drie rijen. Zo is bijv. $a^2 b^3 c$ één der delers.

De indicator $\varphi(a^k b^l c^m)$ van een willekeurige deler $a^k b^l c^m$ is volgens eig. I_2 gelijk aan $\varphi(a^k) \cdot \varphi(b^l) \cdot \varphi(c^m)$.

De indicatoren van de delers worden dus verkregen als het produkt van één der getallen uit elk van de volgende drie rijen.

$$\varphi(1) \quad \varphi(a) \quad \varphi(a^2) \quad \varphi(a^3) \ldots \varphi(a^p) \qquad \text{(I)}$$
$$\varphi(1) \quad \varphi(b) \quad \varphi(b^2) \quad \varphi(b^3) \ldots \varphi(b^q) \qquad \text{(II)}$$
$$\varphi(1) \quad \varphi(c) \quad \varphi(c^2) \quad \varphi(c^3) \ldots \varphi(c^r) \qquad \text{(III)}$$

De som van de indicatoren van de delers ontstaat nu als het produkt van de sommen van de indicatoren van de rijen (I), (II) en (III) (zie de overeenkomstige methode in §162).

$$\varphi(1) + \varphi(a) + \varphi(a^2) + \varphi(a^3) + \ldots + \varphi(a^p) =$$
$$1 + a - 1 + a(a-1) + a^2(a-1) +$$
$$\ldots + a^{p-1}(a-1) = a^p.$$

De sommen van de rijen indicatoren (I), (II) en (III) zijn dus opvolgend a^p, b^q en c^r.

De som van de indicatoren van de delers van n is dus $a^p b^q c^r = n$.

Hiermede is afgeleid de *stelling van Gauss*:

Eig. I_3. Heeft een getal n als delers $d_1, d_2, d_3, \ldots d_k, \ldots n$, dan is $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \varphi(d_3) + \ldots + \varphi(d_k) + \ldots + \varphi(n) = n$.

In deze formule zijn uiteraard 1 en n als delers beschouwd. Is n een priemgetal p, dan leidt dit tot

$$\varphi(1) + \varphi(p) = p$$
$$1 + \varphi(p) = p$$
$$\varphi(p) = p - 1.$$

HET KLEINSTE GEMENE VEELVOUD

§113. Een gemeen veelvoud van twee getallen is een getal, dat door beide getallen deelbaar is.

Het getal 0 is van twee getallen altijd een gemeen veelvoud, omdat 0 deelbaar is door elk geheel getal.

Definitie: Het kleinste gemene veelvoud (K.G.V.) van twee getallen is het kleinste natuurlijke getal dat door beide getallen deelbaar is.

Door de eis, dat het K.G.V. een natuurlijk getal is, wordt 0 als K.G.V. uitgesloten.

Het K.G.V. van twee (niet te grote) getallen is te bepalen door van beide getallen enige opvolgende veelvouden (te beginnen met het getal zelf) op te schrijven en de gelijke aan te strepen. Hierbij wordt het veelvoud 0 niet genoteerd.

24	36	
24	36	
48	72	72 is het K.G.V.
72	108	
96	144	
120	180	
144		
168		

Als men bij het opschrijven van de veelvouden van het ene (en dan liefst het grootste) getal nagaat of dat veelvoud deelbaar is door het andere getal, loopt men geen kans te veel gemene veelvouden op te schrijven, zoals in bovenstaand voorbeeld is gebeurd.

§114. Van twee getallen a en b is G de G.G.D.

Dan geldt:

$a = p \cdot G \qquad b = q \cdot G \qquad p$ en q onderling ondeelbaar.

Dan is $p \cdot q \cdot G$ een gemeen veelvoud van a en b

Stel v is een gemeen veelvoud van a en b.

$$v = m \cdot a \qquad v = n \cdot b$$
$$m \cdot a = n \cdot b$$
$$m \cdot p \cdot G = n \cdot q \cdot G$$
$$m \cdot p = n \cdot q$$

$m \cdot p$ is deelbaar door q; p en q zijn onderling ondeelbaar, dus volgens eig. Db_{19} is $m = r \times q$.

$$v = m \cdot a = r \cdot q \cdot p \cdot G.$$

Uit deze vorm blijkt, dat $p \cdot q \cdot G$ een deler is van elk gemeen veelvoud van a en b. Omdat $p \cdot q \cdot G$ een veelvoud is van a en b, is $p \cdot q \cdot G$ het K.G.V.

Eig. Db_{25}. Het K.G.V. van twee getallen is het produkt van hun

G.G.D. en de quotiënten welke bij deling van die getallen door hun G.G.D. ontstaan.

§115. Uit vorige eigenschap volgt onmiddellijk:

Eig. Db_{26}. Het produkt van twee getallen is het produkt van hun G.G.D. en hun K.G.V.

$a = p \cdot G$
$b = q \cdot G$
G is de G.G.D. van a en b.

Het K.G.V. van a en b is $p \cdot q \cdot G$ (eig. Db_{25}).

$a \times b = p \cdot G \cdot q \cdot G$
$= G \times pqG$
$=$ G.G.D. maal K.G.V.

Uit deze eigenschap volgt, dat het K.G.V. van twee getallen, die onderling ondeelbaar zijn, gelijk is aan het produkt van die getallen.

Indien we van twee (grote) getallen het K.G.V. moeten bepalen, bepalen we eerst met de algoritme van Euclides hun G.G.D. en delen deze G.G.D. op het produkt van de getallen.
Voorbeeld: Bepaal het K.G.V. van 267 en 321.

```
267/321\1
    267
     54/267\4
        216
         51/54\1
            51
             3/51\17
               51
                0
```

Het K.G.V. van 267 en 321 is $267 \times 321 : 3 = 85707 : 3 =$
$= 28569$.

§116.

Eig. Db$_{27}$. Het K.G.V. van twee getallen is gelijk aan het (gedurig) produkt van de machten van alle priemfactoren die minstens in één van die getallen voorkomen, waarbij de macht van elke priemfactor tot exponent heeft de grootste van de exponenten van de machten van diezelfde factor welke in die getallen voorkomen.

We lichten dit toe met een getallenvoorbeeld:

$a = 2 \times 3^3 \times 5^2.$
$b = \quad 3^2 \times 5^2 \times 7.$

Het K.G.V. is $2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$.

Stel $2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 = v$.

v is een veelvoud van a en b volgens eigenschap Db$_{10}$. Als v niet het K.G.V. is, is v een veelvoud van het K.G.V. (eig. Db$_{25}$). Om het K.G.V. te krijgen zouden we v door minstens één priemfactor moeten delen. Dit voert tot een ongerijmdheid, daar het quotiënt niet meer door a en b beide deelbaar kan zijn.

Voorbeeld van toepassing van eig. Db$_{27}$:
Bepaal het K.G.V. van 630 en 2772.

	630
2	315
3	105
3	35
5	7
7	1

	2772
2	1386
2	693
3	231
3	77
7	11
11	1

Op deze wijze vinden we dus:

$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$
$2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11.$

Het K.G.V. is $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 13860$.

§117. De begrippen gemeen veelvoud en K.G.V. zijn ook uit te breiden tot meer dan twee getallen.

Om het K.G.V. van bijv. a, b en c te bepalen, bepale men eerst het K.G.V. van bijv. a en b en daarna het K.G.V. van c en het gevonden K.G.V.

Met de methode van §116 is het K.G.V. direct te bepalen.

KENMERKEN VAN DEELBAARHEID

§118. Een kenmerk van deelbaarheid is een eigenschap, die de mogelijkheid biedt na te gaan of een getal deelbaar is door een bepaald getal, zonder de deling uit te voeren.

Bij het onderzoek naar de kenmerken van deelbaarheid letten we in het bijzonder op de volgende groepen:

a. delers van g^n (g is het grondtal van het talstelsel);
b. delers van $g^n - 1$;
c. delers van $g^n + 1$.

De delers van g^n

§119.

Eig. K1. Elk getal is de som van een veelvoud van g^n en het getal gevormd door de laatste *n* cijfers.

Zo is, in het g-tallig stelsel (in ons voorbeeld $g > 4$):

$$\begin{aligned} \overline{abcde} &= ag^4 + bg^3 + cg^2 + dg + e = \\ &= (ag + b)g^3 + (cg^2 + dg + e) = \\ &= \overline{ab} \cdot g^3 + \overline{cde} = \\ &= \overline{ab000} + \overline{cde}. \end{aligned}$$

Als p een deler van g^3 is, zal de rest bij deling van $\overline{abcde}$ door p gelijk zijn aan de rest bij deling van $\overline{cde}$ door p.

In het algemeen geldt:

Eig. K2. De rest bij deling van een getal door een deler van g^n is gelijk aan de rest bij deling van deze deler op het getal gevormd door de laatste *n* cijfers.

Daar, in het tientallig stelsel, 25 een deler van 100 is, is de rest,

bij deling van 7245 door 25, gelijk aan die van 45 gedeeld door 25.

Uit eigenschap K_2 volgt, dat, als p een deler van g^n is, een getal deelbaar door p is als het getal gevormd door de laatste n cijfers deelbaar is door p.

§120. Zo is in het tientallig stelsel 1000 deelbaar door 25. Doordat 375 deelbaar door 25 is, is elk getal, dat eindigt op 375, deelbaar door 25.

Voor het deelbaar zijn van een getal door 25 is het voldoende, dat het getal gevormd door de laatste drie cijfers, deelbaar is door 25. Deze eis is echter niet nodig, daar 25 ook een deler is van 100, zodat we ons kunnen beperken tot het getal gevormd door de laatste twee cijfers. Een verdere beperking is niet mogelijk, daar 25 geen deler van 10 is.

Om tot een zo scherp mogelijk kenmerk (het nodige en voldoende) te komen, moeten we bij een deler van een macht van het grondtal onze aandacht richten op de macht met de laagste exponent die nog een veelvoud van de deler is.

> **Eig. K_3. Een getal is dan en dan alleen deelbaar door een deler van g^n die geen deler van g^{n-1} is, als het getal gevormd door de laatste n cijfers, deelbaar door die deler is.**

'dan en dan alleen' drukt uit, dat deze voorwaarde voldoende (dan) en nodig (dan alleen) is.

Eigenschap K_3 geeft in ons talstelsel o.a. de volgende bijzondere gevallen:

Een getal is dan en dan alleen deelbaar door 2 (5), als het laatste cijfer even (een 5-voud) is.

Een getal is dan en dan alleen deelbaar door 4 (25), als het getal gevormd door de laatste twee cijfers, deelbaar door 4 (25) is.

Een getal is dan en dan alleen deelbaar door 8 (125), als het getal gevormd door de laatste drie cijfers, deelbaar door 8 (125) is.

In het algemeen beslist bij het onderzoek naar deelbaar zijn door $2^p \cdot 5^q$ het getal gevormd door de laatste k cijfers, waarbij $k = p$ als $p \geqslant q$ en $k = q$ als $p < q$.

§121.

Eig. K_4. Elke macht van g is een $(g - 1)$voud + 1.

We bewijzen dit met volledige inductie, d.w.z.:

1. we tonen aan, dat als de formule geldt voor een zekere, gehele, waarde van n, de formule ook juist is voor de volgende gehele waarde;
2. we wijzen een waarde voor n aan, waarvoor de juistheid van de formule blijkt, waaruit dan volgt, dat de formule juist is voor elke volgende gehele waarde van n.

Bewijs: Stel voor zekere waarde k van n geldt:

$$g^k = (g-1)\text{voud} + 1 \quad \text{dus}$$
$$g^k = a \cdot (g-1) + 1; \quad \text{dan geldt ook:}$$
$$g \cdot g^k = g \cdot a \cdot (g-1) + g \quad (\text{stel } g \cdot a = b)$$
$$g^{k+1} = b(g-1) + (g-1) + 1$$
$$g^{k+1} = (b+1)(g-1) + 1 \quad \text{dus}$$
$$g^{k+1} = (g-1)\text{voud} + 1.$$

Daar $g^0 = 1$, is dus

$$g^0 = 0 \cdot (g-1) + 1 = (g-1)\text{voud} + 1.$$

De formule is dus juist voor $n = 0$, dus voor elke gehele waarde van n.

Eig. K_5. Elk getal is te splitsen in een $(g - 1)$voud en de som van de cijfers.

We illustreren dit met een voorbeeld (in het voorbeeld is $g > 4$):

$$|\overline{abcde}| =$$
$$= ag^4 + bg^3 + cg^2 + dg + e =$$
$$= a\{(g-1)\text{voud} + 1\} + b\{(g-1)\text{voud} + 1\} +$$
$$+ c\{(g-1)\text{voud} + 1\} + d\{(g-1)\text{voud} + 1\} + e =$$
$$= (g-1)\text{voud} + (a+b+c+d+e).$$

In het tientallig stelsel is dus:

$$857432 = 9\text{-voud} + (8+5+7+4+3+2) =$$
$$= 9\text{-voud} + 29 = 9\text{-voud} + 2.$$

Uit eigenschap K_5 volgt:

Eig. K_6. De rest bij deling van een getal door een deler van grondtal min één is gelijk aan de rest bij deling van deze deler op de som der cijfers.

§122. Voor het tientallig stelsel geldt:

Elk getal is te splitsen in een 9-voud en de som van de cijfers.

Elk getal is te splitsen in een 3-voud en de som van de cijfers.

En dit leidt tot de volgende kenmerken van deelbaarheid:

Een getal is dan en dan alleen deelbaar door 9, als de som van de cijfers door 9 deelbaar is.

Een getal is dan en dan alleen deelbaar door 3, als de som van de cijfers door 3 deelbaar is.

Zo is 357243 = 9-voud + 3 + 5 + 7 + 2 + 4 + 3 =
= 9-voud + 24 = 9-voud + 6.

Dit getal is dus geen 9-voud, want 6 is geen 9-voud. Het getal is wel een 3-voud, want 6 is deelbaar door 3.

Opmerking: Als men bij het onderzoek of een getal deelbaar is door 9, de cijfers sommeert, kan men dus een cijfer 9 of twee of meer cijfers die 9 tot som hebben, buiten beschouwing laten.

Bijvoorbeeld: 7953625

$7 + 5 = 12 \rightarrow 3$ (hier hebben we de som van 1 en 2 genomen); $3 + 2 = 5$; $5 + 5 = 10 \rightarrow 1$ $(1 + 0)$. De rest bij deling door 9 is 1.

De negenproef

§123.

(9-voud + a) + (9-voud + b) = 9-voud + $(a + b)$;
(9-voud + a) − (9-voud + b) = 9-voud + $a - b$;
(9-voud + a) · (9-voud + b) = 9-voud + $a \cdot b$.

Deze gelijkheden bieden de mogelijkheid bij berekeningen enige controle uit te oefenen; deze controle staat bekend als 'de negenproef'.

Bij een optelling tellen we van elk van de termen de resten na deling door 9 op en vergelijken de verkregen som met de rest die het antwoord bij deling door 9 geeft.

Voorbeeld:

```
 825374 → 2 ⎫
 121384 → 1 ⎪
 970543 → 1 ⎪
  33763 → 4 ⎬  2 + 1 + 1 + 4 + 3 = 11 → 2
 814251 → 3 ⎪
───────     ⎪
2765315 → 2 ⎭
```

Dit klopt, en er is dus weinig kans, dat een fout gemaakt is.

Controle met de negenproef geeft geen zekerheid, daar bijvoorbeeld een fout die de som van de cijfers niet beïnvloedt, door de negenproef niet wordt ontdekt.

Aftrekking:

```
783243    0 ⎫
514312    7 ⎭  0 − 7 → 9 − 7 = 2
──────                          ↑
268931 → 2   ←klopt─────────────┘
```

Vermenigvuldiging:

```
   89353    1 ⎫
     317    2 ⎭   1 × 2 = 2
  ──────                  ↑
  625471                  │
  893530                  │
26805900                  │
────────                  │
28324901 → 2  ←klopt──────┘
```

Deling (al of niet-opgaand):

```
83/7542914\90878
   747
   ───
    729
    664
    ───
     651
     581
     ───
      704
      664
      ───
       40
```

Bij controle met de negenproef maken we gebruik van de eigenschap:

deeltal = deler × quotiënt + rest.
deeltal 7 + 5 + 4 + 2 + 1 + 4 → 1 + 4 = **5**
deler 8 + 3 = 11 → 2
quotiënt 8 + 7 + 8 = 23 → 5
rest 4 + 0 = 4
deler × quotiënt + rest =
2 × 5 + 4 = 14 → **5**. Klopt!

§124. Eigenschap K_5 is een bijzonder geval van eigenschap:

Eig. K_5'. Elk getal is te splitsen in een (g^n − 1)voud en de som van de getallen die ontstaan als men, rechts beginnend, de cijfers verdeelt in groepen van *n* cijfers.

In het tientallig stelsel is:

7|54|21 = 99-voud + 21 + 54 + 7;
8|327|413 = 999-voud + 413 + 327 + 8.

Opdat een getal deelbaar door 99 (999) is, is het nodig en voldoende, dat de som van de getallen die ontstaan als men de cijfers in groepen van twee (drie) verdeelt, deelbaar door 99 (999) is.

Dergelijke kenmerken gelden, behalve voor 99 en 999, ook voor hun delers:

99; 33; 11
999; 333; 111; 37; 27.

Toepassing: Voor welke waarde(n) van *a* en *b* is $\overline{2a54b23}$ deelbaar door 99?

Oplossing: We splitsen de cijfers in groepen van twee cijfers en sommeren de verkregen getallen

$$23 + \overline{4b} + \overline{a5} + 2 = 70 + \overline{ab} = 99\text{-voud.}$$
$$\overline{ab} = 29$$
$$a = 2;\ b = 9.$$

§125.

Eig. K_7. Iedere macht van g met even exponent is een $(g + 1)$-voud $+1$; iedere macht van g met oneven exponent is een $(g+1)$voud -1.

Evenals in §121 volgt een bewijs met volledige inductie: Stel voor zekere waarde k van n geldt:

$$g^{2k} = (g + 1)\text{voud} + 1, \text{ dan volgt hieruit:}$$
$$g \times g^{2k} = g \cdot (g + 1)\text{voud} + g = (g + 1)\text{voud} + (g + 1) - 1$$
$$g^{2k+1} = (g + 1)\text{voud} - 1$$
$$g \times g^{2k+1} = g \cdot (g+1)\text{voud} - g = (g+1)\text{voud} - (g+1) + 1$$
$$g^{2k+2} = (g + 1)\text{voud} + 1.$$

Daar: $g^0 = 1 = 0 + 1 = 0 \cdot (g + 1) + 1 = (g + 1)\text{voud} + 1$, is de formule waar voor $k = 0$, dus voor elke gehele waarde van k.

Eig. K_8. Elk getal is een $(g + 1)$voud, vermeerderd met de som van de cijfers van oneven rang en verminderd met de som van de cijfers van even rang (bij het bepalen van het ranggetal rechts beginnen).

Voorbeeld ($g > 4$):

$$\begin{aligned}
{}^{\lfloor}\overline{abcde}^{\rfloor} &= ag^4 + bg^3 + cg^2 + dg + e = \\
&= a\{(g + 1)\text{voud} + 1\} + b\{(g + 1)\text{voud} - 1\} + \\
&\quad + c\{(g + 1)\text{voud} + 1\} + d\{(g + 1)\text{voud} - 1\} + e = \\
&= (g + 1)\text{voud} + a + (g + 1)\text{voud} - b + \\
&\quad + (g + 1)\text{voud} + c + (g + 1)\text{voud} - d + e = \\
&= (g + 1)\text{voud} + (a + c + e) - (b + d).
\end{aligned}$$

§126. Volgens eig. K_8 wordt de rest bij deling door 11 als volgt bepaald:

$$\begin{aligned}
732541 &= 11\text{-voud} + (1 + 5 + 3) - (4 + 2 + 7) = \\
& 11\text{-voud} + 9 - 13 = 11\text{-voud} + 7
\end{aligned}$$

Een getal is dan en dan alleen deelbaar door 11, als het verschil van de cijfers op de oneven plaatsen en de som van de cijfers op de even plaatsen deelbaar is door 11.

Evenals bij de negenproef (zie §123) is bij de bewerkingen een controle mogelijk door te letten op de resten bij deling door 11. We hebben dan de zgn. 'elfproef'.

Voorbeeld: De volgende vermenigvuldiging wordt gecontroleerd met behulp van de elfproef:

$$
\begin{array}{r l}
85372 & (2+3+8)-(7+5)=13-12=1 \\
\underline{391} & (1+3)-9=4-9\rightarrow 15-9=6 \\
85372 & \\
7683480 & \\
\underline{25611600} & \\
33380452 & (2+4+8+3)-(5+0+3+3)= \\
 & =17-11=6.
\end{array}
\quad \left.\right\} 1\times 6=6 \;\uparrow\; \text{klopt} \;\downarrow
$$

§127. Evenals eig. K_6 een uitbreiding van eig. K_5 is, is eigenschap K_8 uit te breiden tot:

Eig. K_9. Elk getal is een $(g^n + 1)$voud, vermeerderd met de som van de getallen op de oneven plaatsen, verminderd met de som van de getallen op de even plaatsen, waarbij de getallen ontstaan door de cijfers te splitsen in groepen van *n* cijfers.

In het tientallig stelsel is:

$753245 = 11\text{-voud} + (5 + 2 + 5) - (4 + 3 + 7) =$
$= 11\text{-voud} + 12 - 14 = 11\text{-voud} - 2 = 11\text{-voud} + 9.$

$3824783 = 101\text{-voud} + (83 + 82) - (47 + 3) =$
$= 101\text{-voud} + 115 = 101\text{-voud} + 14.$

$9438706 = 1001\text{-voud} + (706 + 9) - 408 = 1001\text{-voud} + 307.$

Dit geeft voor 11, 101 en 1001 en voor de delers van die getallen overeenkomstige kenmerken van deelbaarheid.

Daar $1001 = 7 \times 11 \times 13$, hebben we hierdoor een kenmerk van deelbaarheid voor 7 en 13 gevonden.

Toepassing: Onderzoek of 853247 deelbaar door 101 is.

$(47 + 85) - 32 = 132 - 32 = 100.$

Het getal is niet deelbaar door 101.

Onderzoek of 12268425 deelbaar door 13 is.

13 is een deler van 1001, dus splitsen we het getal in groepen van drie cijfers.

$(425 + 12) - 268 = 437 - 268 = 169.$

169 is een 13-voud, dus het getal is deelbaar door 13.

Periode van resten

§128. Als we de opvolgende machten van 10 delen door 7, vertonen de resten een periode, d.w.z. de resten zijn te verdelen in volkomen gelijke groepen.

Bij deling van een macht van 10 door 7 is de rest niet groter dan 6. Er zijn dus maximaal 7 resten mogelijk (nl. 0, 1, 2, 3, 4, 5 en 6; het is echter direct duidelijk, dat geen macht van 10 bij deling door 7 rest 0 oplevert).

Heeft men nu zeven opeenvolgende machten van 10 door 7 gedeeld, dan zullen zeker twee resten gelijk zijn; de resten die op deze gelijke resten volgen, zijn ook gelijk omdat

als $10^p = 7\text{-voud} + a$ en $10^q = 7\text{-voud} + a$,

hieruit volgt: $10^{p+1} = 7\text{-voud} + 10a$ en $10^{q+1} = 7\text{-voud} + 10a$.

$$\left.\begin{array}{r} 1 = 7\text{-voud} + 1 \\ 10 = 7\text{-voud} + 3 \\ 100 = 7\text{-voud} + 2 \\ 1000 = 7\text{-voud} + 6 \\ 10000 = 7\text{-voud} + 4 \\ 100000 = 7\text{-voud} + 5 \end{array}\right] \quad \text{de periode van resten van 7 is } \underbrace{1,3,2,6,4,5}$$

$$1000000 = 7\text{-voud} + 1$$

De periode van resten van 3 is $\underbrace{1}$.

Niet altijd begint de periode bij de eerste rest die verschijnt; zo is de periode van resten van 6: $1,\underbrace{4}$, waarbij de 4 repeteert.

$1 = 6\text{-voud} + 1.$

$10 = 10(6\text{-voud} + 1) = 6\text{-voud} + 10 = 6\text{-voud} + 4.$

$100 = 10(6\text{-voud} + 4) = 6\text{-voud} + 4.$

De periode van resten van $14 = 1,\underbrace{10,2,6,4,12,8}$.

Indien we de periode van resten bepalen van een getal dat deler is van een macht van 10, treedt ergens een rest 0 op, terwijl alle volgende resten dan ook 0 zijn.

Hier volgt een overzicht van de periode van resten van enige delers voor de opvolgende machten van 10:

deler	periode van resten
1	$\underbrace{0}$
2	$1, \underbrace{0}$
3	$\underbrace{1}$
4	$1, 2, \underbrace{0}$
5	$1, \underbrace{0}$
6	$1, \underbrace{4}$
7	$\underbrace{1, 3, 2, 6, 4, 5}$
8	$1, 2, 4, \underbrace{0}$
9	$\underbrace{1}$
10	$1, \underbrace{0}$
11	$\underbrace{1, 10}$
12	$1, 10, \underbrace{4}$
13	$\underbrace{1, 10, 9, 12, 3, 4}$
14	$\underbrace{1, 10, 2, 6, 4, 12, 8}$

In §§ 192—194 zullen enige eigenschappen van deze perioden van resten worden bewezen.

Merk op, dat bij de delers die onderling ondeelbaar met 10 zijn, de periode meteen begint, en het aantal cijfers van de periode een deler is van de met één verminderde deler.

Ook, dat bij de perioden met 6 cijfers (zie 7,13 en 14), de som van 1^e en 4^e, en ook van 2^e en 5^e en van 3^e en 6^e, gelijk is aan de deler.

§129. We kunnen de rest bij deling van een getal bepalen met behulp van de periode van resten. Zo is:

$7325 = 5 \times 1 + 2 \times 10 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10^3 =$ (in verband met de periode van resten):

$= 5 \times 1 + 2 \times (\text{7-voud} + 3) + 3 \times (\text{7-voud} + 2) +$
$+ 7 \times (\text{7-voud} + 6) = \text{7-voud} + 5 \times 1 + 2 \times 3 +$
$+ 3 \times 2 + 7 \times 6 = \text{7-voud} + 59 = \text{7-voud} + 3.$

Deze methode komt dus hierop neer, dat we elk cijfer van het getal vermenigvuldigen met het overeenkomstige cijfer van de

periode, waarbij we de cijfers van de periode van rechts naar links onder de cijfers van het getal plaatsen.

Voorbeelden:

Deling door 7:

7	3	2	5	het getal dat door 7 gedeeld wordt
6	2	3	1	een gedeelte van de periode van 7, van rechts naar links opgeschreven

$7325 = 7\text{-voud} + 6 \times 7 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 5.$

Deling door 9:

8	2	1	4	3	het getal dat door 9 gedeeld wordt
1	1	1	1	1	de periode van resten van 9

$$82143 = 9\text{-voud} + 1 \times 8 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 3 =$$
$$= 9\text{-voud} + (8 + 2 + 1 + 4 + 3) =$$
$$= 9\text{-voud} + \text{som van de cijfers},$$

waarmee eigenschap K_6 weer is gevonden.

Deling van $\overline{abcde}$ door 8:

a	b	c	d	e	het getal dat door 8 gedeeld wordt
0	0	4	2	1	de periode van resten van 8

$$\overline{abcde} = 8\text{-voud} + 0 \times a + 0 \times b + 4 \times c + 2 \times d + 1 \times e =$$
$$= 8\text{-voud} + 4c + 2d + e.$$

Dit kunnen we nog wijzigen in: $8\text{-voud} + 4c + 2d + e =$
$= 8\text{-voud} + (96c + 4c) + (8d + 2d) + e =$
$= 8\text{-voud} + 100c + 10d + e = 8\text{-voud} + \overline{cde}$,
waarmee het kenmerk van deelbaarheid van 8 (zie §120) is teruggevonden.

Deling van $\overline{abcdef}$ door 11:

a	b	c	d	e	f	het getal dat door 11 gedeeld wordt
10	1	10	1	10	1	periode van resten van 11

$$\overline{abcdef} = 11\text{-voud} + 10a + b + 10c + d + 10e + f =$$
$$= 11\text{-voud} + 11a - a + b + 11c - c + d +$$
$$+ 11e - e + f =$$
$$= 11\text{-voud} + (f + d + b) - (e + c + a),$$ waarmee het kenmerk van deelbaarheid voor 11 (zie §126) is teruggevonden.

§130. Deze methode komt hierop neer, dat men bijv. bij het onderzoek of een getal door 7 deelbaar is, het te onderzoeken getal vermindert met een zodanig 7-voud, dat het verschil op een 0 eindigt.

Voorbeelden:

Onderzoek of 53473 deelbaar is door 7.

$$\begin{array}{r} 53473 \\ 63 \\ \hline 53410 \end{array}$$

daar $21 = 3 \times 7$, verminderen we het getal met $3 \times 21 = 63$.

We onderzoeken nu het getal 53410, dat tegelijk met 53473 wèl of niet door 7 deelbaar is.

Omdat 10 en 7 onderling ondeelbaar zijn, kunnen we het onderzoek voortzetten (volgens eig. Db_{19}) met het getal 5341.

Het getal 5341 verminderen we met 1×21.

$$\begin{array}{r} 5341 \\ 21 \\ \hline 5320 \end{array}$$

Nu wordt 532 onderzocht en verminderd met $2 \times 21 = 42$.

$$\begin{array}{r} 532 \\ 42 \\ \hline 490 \end{array}$$

Omdat 49 deelbaar is door 7, is 53473 deelbaar door 7. Bovenstaand onderzoek kan in de volgende vorm worden gecomprimeerd:

$$\begin{array}{r} 5\,3\,4\,7|3 \\ 6 \\ \hline 5\,3\,4|1 \\ 2 \\ \hline 5\,3|2 \\ 4 \\ \hline 4\,9 \end{array}$$

deelbaar door 7.

Omdat 21 een 7-voud, eindigend op een 1 is, trekt men 2 maal

het cijfer, rechts van de streep, af van het cijfer (of het getal gevormd door twee cijfers) links van de streep.

Onderzoek of 1566435369 door 17 deelbaar is.

Bedenk: 51 = 3 × 17.

```
156643536|9
       45
-----------
15664349|1
       5
-----------
1566434|4
     20
-----------
156641|4
    20
-----------
15662|1
    5
-----------
1565|7
  35
-----------
1530
15|3
15
--
 0  deelbaar door 17.
```

Het onderzoek kan sneller verlopen door 901 = 53 × 17 te gebruiken:

```
15664353| 69     We splitsen nu 69 af en verminderen
     621         het te onderzoeken getal met 901 × 69.
-----------
156637|32
   288
-----------
1563|49
 441
-----------
112|2            Omdat het getal te klein wordt voor 901, gebruiken
 10              we 51.
-----------
10|2
10
--
 0  deelbaar door 17.
```

Bovengenoemd systeem is te gebruiken voor elke deler die onderling ondeelbaar is met 10.

Indien we moeten onderzoeken of een getal deelbaar is door een deler die onderling deelbaar met 10 is, dan ontbinden we deze deler in de factoren $p \cdot q$, waarbij p een deler van 10 is en q onderling ondeelbaar met 10 is. Het onderzoek of het getal deelbaar is door q kan dan met bovengenoemde methode geschieden. Voor de deler p gebruiken we het kenmerk van §120.

Als p en q onderling ondeelbaar zijn, is een getal dan en dan alleen deelbaar door $p \cdot q$, als het getal door p en door q deelbaar is.

VI. BREUKEN

DEFINITIE, SOORTEN, EIGENSCHAPPEN

§131. In §31 wordt de deling gedefinieerd als de bewerking die, als van een produkt het produkt en één der factoren gegeven is, de andere factor doet vinden → 15 : 5 = 3.

Voor het geval 32 : 5 spreken we van een niet-opgaande deling (zie §42).

Het is wenselijk gebleken de 'uitkomst' van de deling $a : b$ door een getal aan te duiden, ook indien b niet een geheel aantal malen op a begrepen is. Zo komt men tot de invoering van een nieuwe getallensoort:

de *breuken* of de *gebroken getallen.*

Definitie: De breuk $\frac{a}{b}$ *is het getal, waarvoor geldt:* $b \times \frac{a}{b} = a$.

a heet de *teller* van de breuk; a is geheel;
b heet de *noemer* van de breuk; b is een natuurlijk getal.

Per definitie is dus $3 \times \frac{2}{3} = 2$.

$0 : 4 = 0 \rightarrow \frac{0}{4} = 0$, want $0 \times 4 = 0$.

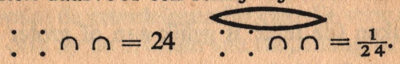
De uitkomst van de deling 32 : 5 wordt voorgesteld door $\frac{32}{5}$ ($^{32}/_{5}$) (spreek uit: twee-en-dertig vijfde).

Opmerking: Schrijfwijze en benaming van de breuk sluiten nauw aan bij de bewerking waaruit zo'n breuk ontstaan gedacht kan worden.

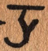
17 : 5 is een *bewerking*;
$\frac{17}{5}$ ($^{17}/_{5}$) is een *getal.*

De tegenwoordige schrijfwijze en naamgeving vereenvoudigen het gebruik van de breuken bij rekenkundige bewerkingen.

De Egyptenaren kenden bijna alleen breuken met teller 1 en gebruikten daarvoor een schrijfwijze verwant aan de onze:



De Romeinen evenwel bezigden voor hun breuken een apart symbolensysteem:

$\frac{7}{12}$ = septunx → ; $\frac{3}{12}$ = quadrans → 

Denk hierbij aan onze 'aparte' benamingen: een 'kwart' voor $\frac{1}{4}$, een 'half' voor $\frac{1}{2}$.

§132. Men onderscheidt onder meer de volgende breukensoorten:

a. *enkelvoudige* breuken (teller en noemer zijn gehele getallen):

$\frac{8}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{91}$;

samengestelde breuken (teller en/of noemer zijn gebroken getallen):

$\frac{2/3}{7}$, $\frac{1/5}{2/7}$, $\frac{3}{4/5}$.

Opmerking 1. Aangezien bij de samengestelde breuken teller en/of noemer niet voldoen aan de eisen, bij de definiëring van breuk gesteld, wordt verwezen naar §133, eig. B_2, waarmee samengestelde breuken kunnen worden omgezet in gelijkwaardige enkelvoudige, die wèl aan de definitie-eisen voldoen.

Opmerking 2. $\begin{matrix} 2 \\ \overline{4} \\ \overline{5} \end{matrix}$ is als breuk niet bepaald; men moet door het gebruik van een hoofdbreukstreep aangeven wat men bedoelt:

$$\frac{\frac{2}{4}}{5} \quad \text{of} \quad \frac{2}{\frac{4}{5}}.$$

b. *echte* breuken (de teller is een kleiner (geheel) getal dan de noemer):

$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$;

onechte breuken (de teller is gelijk aan of groter dan de noemer):

$\frac{5}{5}$, $\frac{5}{7}$.

c. eigenlijke breuken (breuken waarvan de teller *geen* veelvoud van de noemer is):

$\frac{7}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{7}$;

oneigenlijke breuken (de teller is een veelvoud van de noemer; de waarde van zo'n breuk is een geheel getal):

$\frac{4}{2}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{0}{7}$.

*d. stam*breuken (breuken waarvan de teller 1 is):

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{23}$.

e. Twee of meer breuken heten *gelijknamig*, als ze dezelfde noemer hebben, bijv.

$\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ en $\frac{5}{8}$.

Twee of meer breuken heten *ongelijknamig*, als ze niet alle dezelfde noemer hebben, bijv.

$\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{6}$ of $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{8}$.

f. Getallen bestaande uit een geheel getal gevolgd door een breuk, zijn *gemengde* getallen:

$3\frac{1}{8} = 3 + \frac{1}{8}$, $4\frac{2}{9} = 4 + \frac{2}{9}$.

Merk op, dat een breuk met teller 0 gedefinieerd is: $\frac{0}{4} = 0$; een breuk met noemer 0 (bijv. $\frac{4}{0}$) bestaat niet; $\frac{0}{0}$ is onbepaald.

Uit bovengenoemde indeling volgt dus bijvoorbeeld, dat $\frac{4}{7}$ een enkelvoudige, echte, eigenlijke breuk is.

§133. Nu naast de gehele getallen een nieuwe getallensoort is ingevoerd, kunnen eigenschappen die voor de gehele getallen gelden, niet zonder meer op de breuken worden toegepast.

Deze eigenschappen berusten op de telling van verzamelingen, zoals besproken in §§ 3, 4 en 5. Aangezien deze werkwijze voor de breuken niet opgaat, dienen aan deze getallensoort een aantal eigenschappen per definitie te worden toegekend, opdat de grondeigenschappen die voor de gehele getallen gelden, ook op de breuken van toepassing zullen zijn. (Dit zou niet nodig geweest zijn, als we de breuken, evenals de gehele getallen, als getalparen beschouwen: zie § 214 en 218.)

Uit de ontstaanswijze van $a : b$ en de betekenis van $\frac{a}{b}$ blijkt de wenselijkheid, dat de eigenschappen van de deling overeenkomstige eigenschappen bij de breuken hebben.

$15 : 7 \to 2 \times$ rest 1 $\quad 2 \times 7 < 15 \quad\quad 2 < \frac{15}{7} < 3$
$28 : 7 = 4 \to \quad\quad 4 \times 7 = 28 \to \quad\quad \frac{28}{7} = 4.$

Eig. B_1. (per definitie). Van twee gelijknamige breuken is die met de grootste teller het grootst.

Hieruit volgt:

Van twee gelijknamige breuken is die met de kleinste teller het kleinst.

Voorts:

Twee gelijknamige breuken met gelijke tellers zijn gelijk.

Dus $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$, $\frac{2}{9} < \frac{5}{9}$, $\frac{8}{9} = \frac{8}{9}$.

§134. Eigenschap D_2 (§33) luidde: Een quotiënt verandert niet van waarde als men deeltal en deler met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

Een overeenkomstige eigenschap bij de breuken is:

Eig. B_2. (per definitie). Een breuk verandert niet van waarde als teller en noemer met hetzelfde natuurlijke getal worden vermenigvuldigd.

In formule: $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$.

De lezing van rechts naar links (tweede lezing) geeft:

Eig. ${}_2B$. Een breuk verandert niet van waarde als men teller en noemer door hetzelfde getal deelt.

Dus $\frac{2}{7} = \frac{8}{28}$, $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$, $\frac{2/3}{7} = \frac{3 \times 2/3}{3 \times 7} = \frac{2}{21}$ (zie §132, opm. 1).

§135. Voor het vergelijken van de grootte van een aantal ongelijknamige breuken maken we gebruik van de eigenschappen B_1, B_2 en/of ${}_2B$. Met behulp van deze eigenschappen kunnen we de breuken *gelijknamig* maken, d.w.z. vervangen door hiermee gelijkwaardige breuken met dezelfde noemers.

Vergelijken we de breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} \quad \text{(eig. B}_2\text{)}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b} \quad \text{(eig. B}_2\text{)} = \frac{b \times c}{b \times d} \quad \text{(eig. V}_1\text{)}.$$

Volgens de algemene eigenschap, dat twee getallen gelijk zijn als ze beide gelijk zijn aan een derde, is:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{als} \quad a \times d = b \times c}$$

Op overeenkomstige wijze blijkt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{als} \quad a \times d > b \times c \\ \qquad\qquad \text{en} \\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{als} \quad a \times d < b \times c \end{array}}$$

In praktische toepassingen kan het soms de voorkeur verdienen, de twee breuken die vergeleken moeten worden, gelijknamig te maken door als nieuwe noemer het K.G.V. van de oorspronkelijke noemers te nemen.

Voorbeeld:

$\frac{47}{72}$ en $\frac{31}{48}$ K.G.V. van 72 en 48 is 144.
$2 \times 72 = 144$.
$3 \times 48 = 144$.

$$\frac{47}{72} \rightarrow \frac{2 \times 47}{144} \rightarrow \frac{94}{144} \qquad \frac{31}{48} \rightarrow \frac{3 \times 31}{144} \rightarrow \frac{93}{144}$$

Hieruit volgt $\frac{47}{72} > \frac{31}{48}$.

§136. Toepassingen:

1. Van twee breuken met gelijke tellers is die met de grootste noemer het kleinst.

 Gegeven: $\frac{a}{p}$ en $\frac{a}{q}$; $p > q$.

 Te bewijzen: $\frac{a}{p} < \frac{a}{q}$.

Bewijs:

$$\frac{a}{p} = \frac{a \times q}{p \times q}; \quad \frac{a}{q} = \frac{a \times p}{q \times p} = \frac{a \times p}{p \times q}.$$

$p > q$, dus $a \times q < a \times p$.

$$\frac{a}{p} < \frac{a}{q}.$$

2. Van twee echte breuken, waarvan de verschillen van teller en noemer gelijk zijn, is de breuk met de grootste teller het grootst.

Gegeven: $\dfrac{a}{a+v}$ en $\dfrac{b}{b+v}$, $a > b$.

Te bewijzen: $\dfrac{a}{a+v} > \dfrac{b}{b+v}$.

Bewijs:

$$\frac{a}{a+v} = \frac{a \cdot (b+v)}{(a+v)(b+v)} = \frac{a \times b + a \times v}{(a+v)(b+v)}.$$

$$\frac{b}{b+v} = \frac{b \cdot (a+v)}{(b+v)(a+v)} = \frac{b \times a + b \times v}{(a+v)(b+v)} =$$

$$= \frac{a \times b + b \times v}{(a+b)(b+v)}.$$

$a > b \rightarrow a \times b + a \times v > a \times b + b \times v$,

dus $\dfrac{a}{a+v} > \dfrac{b}{b+v}$.

Voorbeeld:

a. $\frac{7}{16} > \frac{6}{15}$;

b. Vergelijk $\frac{7}{13}$ en $\frac{9}{17}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{7}{13} = \frac{28}{52} \\ \frac{9}{17} = \frac{27}{51} \end{array}\right\} \quad \frac{7}{13} > \frac{9}{17}.$$

§137. Eig. 2B kan dienen om breuken te *vereenvoudigen*.

Vereenvoudigen van een breuk is het vervangen van die breuk door een gelijkwaardige breuk met kleinere (gehele) teller en noemer.

Is de vereenvoudiging zo ver mogelijk uitgevoerd, dan is de laatst verkregen breuk *onvereenvoudigbaar*.

$$\tfrac{24}{27} = \frac{24:3}{27:3} = \tfrac{8}{9}.$$

Eig. B_3. Als een breuk met onderling ondeelbare teller en noemer gelijk is aan een andere breuk, dan zijn teller en noemer van de laatste breuk gelijknamige veelvouden van teller en noemer van de eerste breuk.

Bewijs: Als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (a ond. ond. b), dan is volgens het genoemde in §135 $a \times d = b \times c$.

$b \times c$ is deelbaar door a; b en a zijn onderling ondeelbaar, dus is volgens eig. Db_{19} c deelbaar door a. Stel $c = k \times a$.

$$a \times d = b \times c \qquad a \times d = b \times k \times a$$
$$d = k \times b$$

dus c en d zijn gelijknamige veelvouden van respectievelijk a en b. Uit eigenschap B_3 volgt:

Een breuk waarvan teller en noemer onderling ondeelbaar zijn, is onvereenvoudigbaar.

En hieruit volgt:

Als men teller en noemer van een breuk door hun G.G.D. deelt, ontstaat een onvereenvoudigbare breuk (zie §105, eig. Db_{17}).

BEWERKINGEN MET BREUKEN

Optelling van breuken

§138. De definiëring van de optelling van breuken kan niet analoog geschieden met de optelling van de natuurlijke getallen (zie §6). Zonder bewijs, geldt per definitie:

Eig. B_4. De som van twee gelijknamige breuken is gelijk aan de gelijknamige breuk met de som van de tellers als teller.

In formule: $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$.

Uit deze definiëring kan worden afgeleid, dat de optelling van breuken *commutatief* is.

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \qquad \text{(def. optelling breuken)}$$

$$\frac{b}{n}+\frac{a}{n}=\frac{b+a}{n}=\frac{a+b}{n} \qquad \text{(eig. O}_1\text{)}$$

$$\text{dus: } \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{b}{n}+\frac{a}{n}.$$

De tweede lezing luidt:

Eig. $_4$B. Een breuk waarvan de teller een som van twee termen is, is gelijk aan de som van twee hiermee gelijknamige breuken die tot tellers de termen van de som hebben.

Door herhaalde toepassing van eig. B_4 is het mogelijk de som van meer dan twee gelijknamige breuken te bepalen.

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+b+c}{n}.$$

Ook bij de som van breuken geldt de associatieve eigenschap:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{(a+b)+c}{n}=$$

$$=\frac{a+(b+c)}{n} \quad \text{(eig. O}_2\text{)} =$$

$$=\frac{a}{n}+\frac{b+c}{n} \quad \text{(eig. }_4\text{B).}$$

Het optellen van ongelijknamige breuken geschiedt door de breuken eerst gelijknamig te maken en dan op te tellen:

Voorbeeld:

$$\frac{5}{12}+\frac{2}{9}+\frac{3}{8}=\frac{30}{72}+\frac{16}{72}+\frac{27}{72}=\frac{73}{72}=\frac{72}{72}+\frac{1}{72}=1\frac{1}{72}.$$

Opmerking: Nadrukkelijk wordt er de aandacht op gevestigd, dat $\frac{3}{24}+\frac{8}{24}$ *per definitie* gelijk is aan $\frac{11}{24}$, zodat dit niet bewezen wordt. Door onze naamgeving *lijkt het* alsof deze eigenschap vanzelf spreekt. Bijvoorbeeld:

$\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$ (drie twaalfde + vier twaalfde = zeven twaalfde)

Romeins: 5 + 55 = S (quadrans + triens = septunx) (zie §131).

§139. Na de definitie van het gebroken getal, zijn de eigenschappen B_1, B_2 en B_4 per definitie ingevoerd.

Hiermee zijn de *grondeigenschappen* als de commutatieve en de associatieve eigenschappen aangetoond. Overige eigenschappen die voor de gehele getallen gelden, zijn *afgeleide* eigenschappen, en deze zijn nu op de breuken mede van toepassing, voor zover bewerkingen met gehele getallen op gelijke wijze voor de breuken gedefinieerd kunnen worden (zie ook §10).

Aftrekking van breuken

§140. Aftrekking, zijnde de omkering van de optelling, geeft, als de som van twee breuken en één der breuken gegeven is, de andere breuk.

Eig. B_5. Het verschil van twee gelijknamige breuken is een gelijknamige breuk, die tot teller heeft het verschil van de tellers.

In formule: $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$.

We bewijzen: verschil + aftrekker = aftrektal.

Bewijs:

$$\frac{a-b}{n} + \frac{b}{n} = \frac{(a-b)+b}{n} \quad \text{(def. som breuken)} =$$

$$= \frac{a}{n} \quad \text{(def. verschil).}$$

Tweede lezing (van rechts naar links):

Eig. ${}_5B$. Een breuk waarvan de teller gelijk is aan het verschil van twee getallen, is gelijk aan het verschil van twee ermee gelijknamige breuken die tot teller hebben aftrektal respectievelijk aftrekker van de teller van de oorspronkelijke breuk.

Het verschil van twee ongelijknamige breuken wordt bepaald door de breuken eerst gelijknamig te maken en daarna eigenschap B_5 toe te passen. Bijvoorbeeld:

$$3\tfrac{2}{3} - 1\tfrac{3}{4} = 3\tfrac{8}{12} - 1\tfrac{9}{12} = 2 + 1 + \tfrac{8}{12} - 1\tfrac{9}{12} =$$
$$= 2 + \tfrac{12}{12} + \tfrac{8}{12} - 1\tfrac{9}{12} =$$
$$= 2 + \tfrac{20}{12} - 1 - \tfrac{9}{12} =$$
$$= 2 - 1 + \tfrac{20}{12} - \tfrac{9}{12} =$$
$$= 1 + \tfrac{11}{12} = 1\tfrac{11}{12} \; .$$

Vermenigvuldiging van een breuk met een geheel getal

§141. Onder $n \times \frac{a}{b}$ verstaan we de som van n gelijke termen $\frac{a}{b}$.

$$n \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b} \text{ (} n \text{ termen)} =$$

$$= \frac{a + a + a + \ldots + a \text{ (} n \text{ termen)}}{b} = \frac{n \times a}{b}.$$

Voorts geldt:

$$\frac{n \times a}{b} = \frac{(n \times a) : a}{b : a} = \frac{n}{b : a}.$$

Eig. B6. Een breuk wordt met een geheel getal vermenigvuldigd door de teller met dat getal te vermenigvuldigen of door de noemer door dat getal te delen.

In formule: $n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b}$

$$n \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b : n}.$$

Uit deze eigenschap blijkt, dat de breuk $\frac{7}{8}$, die beschouwd kan worden als de uitkomst van de deling 7 : 8, tevens is op te vatten als de uitkomst van de vermenigvuldiging $7 \times \frac{1}{8}$.

Deling van een breuk door een geheel getal

§142.

Eig. B7. Een breuk wordt door een geheel getal gedeeld door de teller door dat getal te delen of door de noemer met dat getal te vermenigvuldigen.

In formule: $\frac{a}{b} : n = \frac{a : n}{b}$

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{n \times b}.$$

We bewijzen: deler × quotiënt = deeltal.

Bewijs:

$$n \times \frac{a : n}{b} = \frac{n \times (a : n)}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{(def. deling).}$$

Hiermee is aangetoond: $\frac{a}{b} : n = \frac{a : n}{b}$.

Voorts is $\frac{a : n}{b} = \frac{n \times (a : n)}{n \times b}$ (eig. B_2) $= \frac{a}{n \times b}$.

Vermenigvuldiging van een breuk met een breuk

§143. Aan $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ kan nu niet de betekenis toegekend worden:

som van $\frac{a}{b}$ gelijke termen $\frac{c}{d}$.

Definitie: Onder $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ *wordt verstaan* $a \times \frac{c}{d} : b$.

Eig. B_8. Het produkt van twee breuken is gelijk aan een breuk met als teller het produkt van de tellers en als noemer het produkt van de noemers.

In formule: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

Bewijs:

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} =$ (definitie vermenigvuldiging breuken)

$= a \times \frac{c}{d} : b =$ (eig. B_6)

$= \frac{a \times c}{d} : b =$ (eig. B_7)

$= \frac{a \times c}{b \times d}$.

Van rechts naar links gelezen:

Eig. $_8B$. Als van een breuk teller en noemer produkten zijn, dan is deze breuk gelijk aan het produkt van twee breuken, waarvan de ene breuk één der factoren uit de teller tot teller en één der factoren uit de noemer tot noemer heeft, en de andere breuk de andere factor uit teller en noemer tot teller, respectievelijk noemer heeft.

Bijvoorbeeld:

$$\frac{3}{8} \times \frac{6}{11} = \frac{3 \times 6}{8 \times 11} = \frac{3 \times 2 \times 3}{2 \times 4 \times 11} = \frac{3 \times 2 \times 3 : 2}{2 \times 4 \times 11 : 2} =$$

$$= \frac{3 \times 3}{4 \times 11} = \frac{9}{44}.$$

Afgekort wordt dit meestal als volgt genoteerd:

$$\frac{3}{\not{8}_4} \times \frac{\not{6}^3}{11} = \frac{9}{44}.$$

§144. Bewijs, dat de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen van de vermenigvuldiging op de breuken van toepassing zijn.

1. Commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging.

Te bewijzen: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

Bewijs: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{c \times a}{d \times b} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

2. Associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging.

Te bewijzen: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}$.

Bewijs:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \frac{c \times e}{d \times f} = \frac{a \times (c \times e)}{b \times (d \times f)} = \frac{(a \times c) \times e}{(b \times d) \times f} =$$

$$= \frac{a \times c}{b \times d} \times \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}.$$

3. Distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging.

Te bewijzen: $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$.

Bewijs:

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c \times f}{d \times f} + \frac{d \times e}{d \times f}\right) =$$

$$= \frac{a}{b} \times \frac{c \times f + d \times e}{d \times f} =$$

$$= \frac{a \times (c \times f + d \times e)}{b \times d \times f} =$$

$$= \frac{a \times c \times f + a \times d \times e}{b \times d \times f} =$$

$$= \frac{a \times c \times f}{b \times d \times f} + \frac{a \times d \times e}{b \times d \times f} =$$

$$= \frac{a \times c}{b \times d} + \frac{a \times e}{b \times f} =$$

$$= \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}.$$

Deling van een breuk door een breuk

§145.

Eig. B9. Het quotiënt van twee breuken is gelijk aan de breuk, die tot teller heeft het quotiënt van de tellers en tot noemer het quotiënt van de noemers.

In formule: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}.$

We bewijzen: quotiënt × deler = deeltal.

Bewijs:

$$\frac{a : c}{b : d} \times \frac{c}{d} = \frac{(a : c) \times c}{(b : d) \times d} = \frac{a}{b}.$$

§146.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} =$$

$$= \frac{(a : c) \times c}{(b : d) \times c} =$$

$$= \frac{\{(a : c) \times c\} \times d}{\{(b : d) \times c\} \times d} =$$

$$= \frac{\{(a : c) \times c\} \times d}{\{(b : d) \times d\} \times c} =$$

$$= \frac{a \times d}{b \times c} =$$

$$= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} =$$

$$= \frac{d}{c} \times \frac{a}{b}.$$

Eig. B_{10}. Een breuk wordt door een breuk gedeeld door de eerste breuk te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede breuk.

Opmerking: *Twee getallen zijn elkaars omgekeerde als hun produkt 1 is.*

Het omgekeerde van $\frac{a}{b}$ is $\frac{b}{a}$, immers:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{a \times b}{a \times b} = 1.$$

Het omgekeerde van $\frac{2}{3}$ is $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Het omgekeerde van 2 is $\frac{1}{2}$, want $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Voorbeeld van toepassing van eigenschap B_{10}:

$$\frac{3}{8} : \frac{9}{4} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}.$$

Eigenschap B_{10} verdient de voorkeur boven eig. B_9, omdat bij toepassing van eig. B_{10} de teller en noemer onmiddellijk gehele getallen zijn (indien de tellers en noemers van deeltal en deler dat ook zijn).

Met B_9: $$\frac{3}{7} : \frac{5}{8} = \frac{3:5}{7:8} = \frac{^3/_5}{^7/_8} = \frac{^3/_5 \times 40}{^7/_8 \times 40} = \frac{^3/_5 \times 5 \times 8}{^7/_8 \times 8 \times 5} =$$

$$= \frac{3 \times 8}{7 \times 5} = \frac{24}{35}.$$

Met B_{10}: $\frac{3}{7} : \frac{5}{8} = \frac{8}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{24}{35}$.

§147. Voor de breuken zijn nu de grondeigenschappen, met inachtneming van de gegeven definities, bewezen. De hieruit afgeleide eigenschappen (zoals die voor de gehele getallen gelden) kunnen nu zonder bewijs van toepassing worden verklaard op de breuken.

Met betrekking tot de deling betekent dit, dat de eigenschappen D_1 tot en met D_8 ook voor de breuken gelden.

Bijvoorbeeld D_4:

$$(a : b) \times p = a : (b : p)$$

gaat over in

$$\left(\frac{p}{q} : \frac{r}{s}\right) \times \frac{t}{u} = \frac{p}{q} : \left(\frac{r}{s} : \frac{t}{u}\right).$$

Controle:

$$\left(\frac{p}{q} : \frac{r}{s}\right) \times \frac{t}{u} = \left(\frac{s}{r} \times \frac{p}{q}\right) \times \frac{t}{u} = \frac{s}{r} \times \frac{p}{q} = \frac{t}{u}$$

$$\frac{p}{q} : \left(\frac{r}{s} : \frac{t}{u}\right) = \frac{p}{q} : \left(\frac{u}{t} \times \frac{r}{s}\right) =$$

$$= \frac{p}{q} : \frac{u \times r}{t \times s} = \frac{t \times s}{u \times r} \times \frac{p}{q} = \frac{t}{u} \times \frac{s}{r} \times \frac{p}{q} = \frac{s}{r} \times \frac{p}{q} \times \frac{t}{u}.$$

Machtsverheffing van breuken

§148. Machtsverheffing is gedefinieerd, voor zover het grondtal een breuk en de exponent een geheel getal is.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b} \quad (n \text{ factoren}).$$

Uit hetgeen opgemerkt is bij de vermenigvuldiging volgt hieruit:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad \text{Per definitie geldt: } \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1.$$

Worteltrekking uit breuken

§149. Worteltrekking is gedefinieerd, voor zover het grondtal een breuk en de wortelexponent een natuurlijk getal is.

Onder de p^e-machtswortel uit $\frac{a}{b}$ verstaan we het getal, dat tot de p^e macht verheven $\frac{a}{b}$ oplevert.

Definitieformule:

$$\left(\sqrt[p]{\frac{a}{b}}\right)^p = \frac{a}{b}.$$

§150. ${}^{g}\log \frac{a}{b} = {}^{g}\log a - {}^{g}\log b$ (zie §61).

${}^{\frac{p}{q}}\log \frac{a}{b}$ is de exponent van de macht, waartoe $\frac{p}{q}$ moet worden verheven om $\frac{a}{b}$ op te leveren.

§151. Met betrekking tot de machtsverheffing, worteltrekking en logaritmeneming zij het volgende opgemerkt:

1. Het gebruik van een gebroken getal als exponent bij de machtsverheffing en worteltrekking wordt hier niet, in de algebra wèl gedefinieerd.
2. Overeenkomstig het gestelde in §147 zijn de eigenschappen van de machtsverheffing, worteltrekking en logaritmeneming, zoals die gelden voor de gehele getallen, ook van toepassing op de gebroken getallen.

TIENDELIGE BREUKEN

Definitie

§152.

Een tiendelige breuk is een breuk, waarvan de noemer een macht van 10 is.

Voorbeelden: $\frac{7}{100}$, $\frac{35}{10}$, $\frac{421}{1000}$, in het algemeen $\frac{t}{10^p}$ (waarin t een geheel, p een natuurlijk getal is).

In §72 is uiteengezet, dat in het getal 5753 de cijfers 5, 7, 5 en 3 behoren bij de betrekkelijke waarden 10^3, 10^2, 10^1 en 10^0, waaruit volgt, dat de rij van de betrekkelijke waarden, van links naar rechts beschouwd, een rij getallen is waarvan de volgende getallen steeds een tiende deel van de voorgaande getallen zijn (meetkundige rij: zie §159).

Wordt deze rij voortgezet rechts van de eenheden, dan zal de eerstvolgende plaats de betrekkelijke waarde $\frac{1}{10}$ vertegenwoordigen, de volgende plaats $\frac{1}{100}$, enz.

Hierbij moet de plaats van de eenheden wel gemarkeerd worden, hetgeen in ons getallensysteem gebeurt door een kom-

ma, rechts van het cijfer der eenheden, als rechts van dit cijfer nog cijfers staan.

Dit leidt tot een andere schrijfwijze van bepaalde getallen bijvoorbeeld:

$$13{,}217 = 13 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}.$$

Met behulp van dit systeem kunnen we voor tiendelige breuken, naast de gebruikelijke, een andere schrijfwijze invoeren:

$$\frac{235}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} =$$
$$= 0{,}235.$$

Op overeenkomstige wijze blijkt dat $0{,}235 = \frac{235}{1000}$.

Hieruit blijkt, dat elke tiendelige 'streepbreuk' geschreven kan worden als een 'kommabreuk' en omgekeerd.

Het verschil tussen $\frac{235}{1000}$ en 0,235 bestaat uitsluitend in de schrijfwijze; de betekenis van beide notaties is dezelfde.

Uit dit voorbeeld blijkt voorts, dat bij ontbreken van gehelen in een getal, vóór de komma (*decimaalteken* genaamd) één nul wordt geplaatst.

$$\frac{2465}{10^8} = \frac{2 \cdot 10^3}{10^8} + \frac{4 \cdot 10^2}{10^8} + \frac{6 \cdot 10}{10^8} + \frac{5}{10^8} =$$
$$= \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{0}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{4}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} =$$
$$= 0{,}00002465.$$

Een tiendelige breuk kan geschreven worden als een *decimale breuk*, die een aantal cijfers achter het decimaalteken heeft minstens gelijk aan de exponent van 10 in de noemer.

Opmerking: Men kan bij een decimale breuk rechts van het laatste cijfer een willekeurig aantal nullen plaatsen:

0,35 = 0,3500.

Bewerkingen met tiendelige breuken

§153. Het voordeel van laatstgenoemde schrijfwijze van tiendelige breuken schuilt, naast de eenvoud, in een vereenvoudigde uitvoering van bewerkingen.

Door toevoeging van een aantal nullen zijn twee decimale getallen op eenvoudige wijze gelijknamig te maken.

0,126 = 0,12600.

Vereenvoudiging van kommabreuken kan plaatsvinden door eventuele nullen rechts weg te laten:

$$0{,}12600 = 0{,}126.$$

A. *Optelling*

$0{,}12 + 3{,}784 + 12{,}0256$ wordt uitgerekend op de volgende manier:

$$\begin{array}{rcr} 0{,}12 & = & 0{,}1200 \\ 3{,}784 & = & 3{,}7840 \\ 12{,}0256 & = & 12{,}0256 \\ \hline & & 15{,}9296 \end{array} +$$

De toegevoegde nullen – om gelijknamige breuken te krijgen – kunnen worden weggelaten, zodat de bewerking als volgt verloopt:

$$\begin{array}{r} 0{,}12 \\ 3{,}784 \\ 12{,}6256 \\ \hline 15{,}9296 \end{array} +$$

Regel: *Komma's onder elkaar.*

B. *Aftrekking*

Dit geschiedt op dezelfde wijze als bij de optelling.

$$\begin{array}{r} 0{,}12784 \\ 0{,}0243 \\ \hline 0{,}10354 \end{array} -$$

C. *Vermenigvuldiging*

$$\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} = \frac{a \times b}{10^{m+n}}.$$

Het produkt van twee tiendelige breuken is een tiendelige breuk. De exponent van 10 in de noemer van het produkt is gelijk aan de som van de exponenten van 10 in de noemers van de factoren. Dit betekent, dat het aantal cijfers achter het decimaalteken in het produkt gelijk is aan de som van de aantallen cijfers achter het decimaalteken in de factoren, voor zover het produkt niet wordt vereenvoudigd.

(Deze vereenvoudiging kan plaats vinden als de teller van de ene breuk een factor 2 en de teller van de andere breuk een factor 5 bevat, bijvoorbeeld: $\frac{35}{100} \times \frac{6}{10} = \frac{210}{1000} = \frac{21}{100}$.)

Voor het vermenigvuldigen van decimale breuken hebben we dus de volgende regel:

Het produkt wordt op de gewone wijze bepaald; het aantal decimalen (cijfers achter de komma) is gelijk aan de som van de aantallen decimalen van de factoren.

D. *Deling*

$$\frac{a}{10^n} : \frac{b}{10^m} = \frac{a:b}{10^{n-m}}.$$

1. Als $a : b$ een geheel getal tot quotiënt heeft (en $n > m$), ontstaat een decimale breuk waarvan het aantal decimalen gelijk is aan het aantal decimalen van het deeltal verminderd met het aantal decimalen van de deler.
2. Als $a : b$ niet geheel is, maar $a \cdot 10^p : b$ wèl, is herleiding tot een tiendelige breuk mogelijk, zoals blijkt uit:

$$\frac{a}{10^n} : \frac{b}{10^m} = \frac{a:b}{10^{n-m}} = \frac{a \cdot 10^p : b}{10^{n-m+p}}.$$

Uitvoering:

1. $\frac{437}{10^5} : \frac{23}{10^2} = \frac{19}{10^3}$

 $0{,}00437 : 0{,}23 = 0{,}019.$

 De notatie van deze bewerking kan als volgt zijn:

```
0,23/0,00437\
23 / 0,437 \ 0,019
     0
     4
     0
     43
     23
     207
     207
       0
```

een quotiënt verandert niet van waarde als men deeltal en deler met hetzelfde getal vermenigvuldigt

Als bij het ‘aanhalen’ (zie §80) in het deeltal de komma wordt gepasseerd, wordt in het quotiënt de komma geplaatst.

De notatie kan ook zijn:

23/0,437\0,019

23

207

207

0

of:

23/437\19

23

207

207

0

dus: $0{,}\underbrace{00437}_{5} : 0{,}\underbrace{23}_{2} = 0{,}\underbrace{019}_{3}$.

2. 0,759 : 0,16

0,16/0,759\

16/ 75,9\4,93125

64

119

114

50 hier worden dus nullen aangehaald

48

20

16

40

32

80

80

0

De algoritme van de worteltrekking, ontwikkeld in §82, kan toegepast worden op een getal met decimalen, waarbij de cijfers van het getal worden verdeeld in groepen van twee cijfers, waarbij een verdeelstreep over de komma loopt.

Voorbeeld: Bereken $\sqrt{10{,}0489}$.

Berekening:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{10{,}04\ 89} = 3{,}\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{7} \\
3 \times 3 = & 9 \\
\hline
 & 104 \\
6\underset{\cdot}{1} \times \underset{\cdot}{1} = & 61 \\
\hline
 & 43\ 89 \\
62\underset{\cdot}{7} \times \underset{\cdot}{7} = & 43\ 89 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Herleiding van een onvereenvoudigbare breuk tot een tiendelige

§154.

Eig. B₁₁. Een onvereenvoudigbare breuk is dan en dan alleen te herleiden tot een tiendelige breuk, als de noemer geen andere factoren dan 2 en/of 5 bevat.

Bewijs:

$$\frac{a}{2^m \cdot 5^n}\ (m \geqslant n) = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m};$$

$$\frac{a}{2^m \cdot 5^n}\ (m < n) = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n}.$$

Hieruit blijkt, dat de tiendelige breuk die ontstaat, als decimale breuk geschreven een aantal decimalen heeft gelijk aan de grootste van de exponenten van 2 en/of 5 in de oorspronkelijke noemer.

We hebben nu bewezen, dat de voorwaarde voldoende is. Dat ze ook nodig is, blijkt als volgt:

Als de onvereenvoudigbare breuk $\frac{t}{n}$ gelijk is aan een tiendelige breuk, dan is de noemer van de laatste breuk een veelvoud van de noemer van de eerste breuk. Dat wil zeggen, dat n een deler is van een macht van 10, die dus slechts factoren 2 en 5 bevat. Volgens eig. Db_{10} bevat n dan geen andere factoren dan 2 en/of 5.

De herleiding verloopt als volgt:

a. $\frac{3}{16} = \frac{3}{2^4} = \frac{3 \cdot 5^4}{10^4} = \frac{1875}{10000} = 0{,}1875$

b. 16/3,0000\0,1875

```
     16
     ---
     1 40
     1 28
     ----
       120
       112
       ---
         80
         80
         --
          0
```

De laatste methode kan beschouwd worden als een ontwikkeling, overeenkomstig de deling van twee decimale breuken waarvan de exponenten van 10 in de noemers nul zijn.

g-delige breuken in het g-tallig stelsel

§155. In het *g*-tallig stelsel is sprake van *g*-delige breuken. Bijvoorbeeld:

1243,245 (zestallig) =

$$= 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 1 + $$
$$+ 2 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{10^2} + 5 \times \frac{1}{10^3} \text{ (zestallig)}$$
$$= 1 \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{1}{6} +$$
$$+ 4 \times \frac{1}{6^2} + 5 \times \frac{1}{6^3} \text{ (tientallig stelsel)} =$$
$$= 216 + 72 + 24 + 3 + \frac{2}{6} + \frac{4}{36} + \frac{5}{216} = 315\,\frac{101}{216}.$$

Is $\frac{13}{24}$ (zestallig stelsel) te herleiden tot een 10-delige breuk?

$$\frac{13}{24} \text{ (zestallig)} = \frac{3^2}{2^4} \text{ (zestallig)} = \frac{3^{10}}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{3^{10}}{10^4} =$$

$$= \frac{3213}{10^4} = 0{,}3213 \text{ (zestallig stelsel).}$$

In het zestallig stelsel is een onvereenvoudigbare breuk dan en dan alleen te herleiden tot een 10(één nul)-delige breuk, als de noemer geen andere factoren dan 2 en/of 3 bevat (zie eig. B_{11}).

VII. RIJEN

REKENKUNDIGE RIJEN

§156.

Definitie: Een rekenkundige rij is een rij getallen, waarvan de getallen (termen) met een zelfde verschil opklimmen of afdalen.

Voorbeelden:

opklimmende rij 2; 5; 8; 11; 14; 17; 20;
afdalende rij 100; 90; 80; 70; 60; 50.

Ook een rij gelijke getallen kunnen we beschouwen als een rekenkundige rij ('opklimmend' met 0).

Als we de eerste term voorstellen door a en het verschil door v, kunnen we een *opklimmende* rekenkundige rij voorstellen door

$$a,\ a + v,\ a + 2v,\ a + 3v,\ a + 4v,\ a + 5v,\ a + 6v \ldots a + (n - 1)v.$$

De k^e term kunnen we ook aangeven door t_k.

Bij bovengenoemde rij is dus:

$$t_1 = a;$$
$$t_2 = a + v;$$
$$t_3 = a + 2v;$$
$$t_n = a + (n - 1)v.$$

Als een rij n termen heeft, stellen we de laatste term voor door t_n of l.

Bij een *afdalende* rekenkundige rij met eerste term a en verschil v zijn de termen voor te stellen door

$$a,\ a - v,\ a - 2v,\ a - 3v,\ a - 4v \ldots a - (n - 1)v.$$

Bij een *opklimmende* rekenkundige rij kunnen we de som van de eerste n termen voorstellen door de volgende *reeks* (we noemen deze som S_n):

$$S_n = a + (a + v) + (a + 2v) + \ldots + (l - v) + l$$
$$S_n = l + (l - v) + (l - 2v) + \ldots + (a + v) + a$$
$$+$$
$$2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots + (a + l) + (a + l)$$
$$2S_n = n \cdot (a + l)$$
$$S_n = \tfrac{1}{2}n(a + l).$$

Bij een *afdalende* rekenkundige rij wordt dit:

$$S_n = a \quad + (a-v) + (a-2v) + (a-3v) + \ldots + (l+v) + l$$

$$S_n = l \quad + (l+v) + (l+2v) + (l+3v) + \ldots + (a-v) + a$$

$$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + (a+l) \quad + \ldots + (a+l) + (a+l) \quad +$$

$$2S_n = n \cdot (a+l)$$

$$S_n = \tfrac{1}{2}n(a+l).$$

Voor *elke* rekenkundige rij geldt dus:

$$\boxed{S_n = \tfrac{1}{2}n(a+l)}$$

§157. Toepassing: Bereken de som van alle even getallen kleiner dan 200.

Oplossing: de even getallen van 0 tot en met 198 vormen een rekenkundige rij.

$$198 = 0 + (n-1)2$$

$$99 = n - 1 \rightarrow n = 100$$

Het aantal termen is 100

$$S_{100} = \tfrac{1}{2} \cdot 100 \cdot (0 + 198) = 50 \times 198 = 9900.$$

§158. Onder het *gemiddelde* (ook wel: de *rekenkundig middelevenredige*) van de getallen a en c verstaat men het getal b, waarvoor geldt, dat a, b en c in deze volgorde een rekenkundige rij vormen.

Dit betekent (we kunnen, zonder aan de algemeenheid tekort te doen, $a < c$ stellen):

$$a = a, \quad b = a + v, \quad c = a + 2v$$

dus $a + c = 2b$

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

Het gemiddelde van twee getallen is gelijk aan de helft van hun som.

Definitie en formule

§159.
Een meetkundige rij is een rij getallen, waarbij elk getal (behalve het eerste) door vermenigvuldiging met een vast getal uit het voorafgaande getal wordt verkregen.

Het getal waarmee wordt vermenigvuldigd, is de *reden* $(= r)$ van de rij.

Voorbeelden:

opklimmende meetkundige rij $(r > 1)$

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \ldots (r = 2)$$

afdalende meetkundige rij $(r < 1)$

$$1000, 100, 10, 1, 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots (r = \tfrac{1}{10}).$$

Een rij gelijke getallen kunnen we beschouwen als een meetkundige rij met reden 1.

In al deze gevallen is de meetkundige rij voor te stellen door

$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5 \ldots ar^{n-1}.$
$t_1 = a;$
$t_2 = ar;$
$t_5 = ar^4;$
$t_n = ar^{n-1}.$

Om een formule voor de som van de eerste n termen van een meetkundige rij te vinden, kunnen we als volgt handelen (deze som stellen we voor door S_n):

$r > 1$

$$\begin{array}{rl} r \times S_n = & \quad ar + ar^2 + ar^3 \ldots + ar^{n-1} + ar^n \\ S_n = & a + ar + ar^2 \ldots \quad + ar^{n-1} \quad - \\ \hline (r-1)\, S_n = & ar^n - a = a(r^n - 1) \end{array}$$

$$\boxed{S_n = a\,\frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{als} \quad r > 1}$$

$r < 1$

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + ar + ar^2 \ldots \qquad + ar^{n-1} \\ r \times S_n = & \qquad ar + ar^2 + ar^3 \ldots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = & a - ar^n = a(1-r^n) \end{array} \quad -$$

$$\boxed{S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{als} \quad r < 1}$$

Als $r = 1$, zijn alle termen gelijk en is $S_n = n \times a$.

Oneindig voortlopende meetkundige rijen

§160. De reeks

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

vertoont de eigenaardigheid, dat de som van de eerste n termen evenveel minder dan 2 is als de n-de term bedraagt.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 2 - \tfrac{1}{8}$$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Indien we n laten toenemen, wordt de som van de eerste n termen steeds groter en wel zó, dat het verschil van de som van de eerste n termen en 2 steeds kleiner wordt en *op de duur blijvend kleiner wordt dan elk van te voren bepaald* (*klein*) *getal.*

Men kan bij elk gekozen (klein) getal ε een zodanige k bepalen, dat voor elke $n > k$ de som van de eerste n termen (S_n) minder dan ε van 2 verschilt.

In zo'n geval zegt men, dat 2 de *limiet* van S_n is voor onbeperkt toenemende n (voor n naar oneindig).

Men schrijft dit als volgt: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 2.$

Spreek uit: de limiet van S_n, voor n naar oneindig, is twee. (Zie voor het begrip limiet het compendium-deel Algebra).

Als $r < 1$:

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

$$\frac{a}{1-r} \quad \text{is onafhankelijk van } n;$$

$$\frac{ar^n}{1-r} \quad \text{is afhankelijk van } n.$$

Er is een zodanige k te bepalen dat voor $n > k$

$$\frac{ar^n}{1-r} < \varepsilon \quad ,$$

waarbij ε een willekeurig (klein) getal is.

Daarom geldt voor een oneindig voortlopende meetkundige rij, waarbij $r < 1$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}}$$

Voorbeeld:

Wat is de waarde van de volgende oneindig voortlopende meetkundige reeks

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots ?$$

Oplossing: $r = \frac{1}{10} < 1$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}.$$

De middelevenredige

§161. De (meetkundig) *middelevenredige* van de getallen a en c is het getal b, waarvoor geldt, dat a, b en c in deze volgorde een meetkundige rij vormen.

$a = a,\ b = ar,\ c = ar^2$

$b^2 = ac$

$b = \sqrt{ac}$

§162. In §96 is afgeleid een formule voor het aantal delers van een getal.

Stel $n = a^p \cdot b^q \cdot c^r$ (a, b en c priem).

De delers, die machten zijn van één priemgetal, zijn:

I. $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 \ldots a^p$
II. $b^0, b^1, b^2, b^3, \ldots b^q$
III. $c^0, c^1, c^2, c^3 \ldots c^r$.

Daar alle delers worden verkregen (zie §96) door alle produkten te nemen van drie factoren, waarbij uit elke rij één factor wordt genomen, is de som van alle delers van n (we duiden deze som aan door $S(n)$) het produkt van de som van rij I, de som van rij II en de som van rij III.

Elke rij is een meetkundige rij ($a > 1$; $b > 1$; $c > 1$).

De som van de getallen van I is $\dfrac{a^{p+1} - 1}{a - 1}$;

de som van de getallen van II is $\dfrac{b^{q+1} - 1}{b - 1}$;

de som van de getallen van III is $\dfrac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$.

Hieruit volgt:

$$S(n) = \frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}.$$

Uit deze formule volgt dat, als m en n onderling ondeelbaar zijn

$$S(m \cdot n) = S(m) \cdot S(n).$$

Volkomen getallen

§163.

Definitie: Een volkomen getal (perfect getal) is een getal, dat gelijk is aan de som van al zijn delers die kleiner zijn dan het getal.

Voorbeeld: 6 is een volkomen getal; de delers van 6 kleiner dan 6, zijn 1, 2, 3. $6 = 1 + 2 + 3$.

Men kan ook zeggen:
Een volkomen getal is een getal, dat 1 groter is dan de som van zijn echte delers (zie §83);
of: Een volkomen getal is een getal, dat de helft is van de som van zijn delers.

Oneven volkomen getallen zijn niet bekend.

§164. Toepassing: Een onderzoek naar de gedaante van een volkomen getal n (neem n even).

$n = 2^p \cdot a$ (a is oneven; $a > 1$)
$S(n) = (2^{p+1} - 1) \cdot S(a)$ want a onderling ondeelbaar met 2^p; zie §162.

n is een volkomen getal, dus $S(n) = 2n$.

I. $2^{p+1} \cdot a = (2^{p+1} - 1) \cdot S(a)$.

Omdat $2^{p+1} - 1$ en 2^{p+1} onderling ondeelbaar zijn, is (zie eig. Db_{19}) $S(a)$ deelbaar door 2^{p+1}:

Stel $S(a) = 2^{p+1} \cdot b$, waardoor I overgaat in:

$2^{p+1} \cdot a = (2^{p+1} - 1) \cdot 2^{p+1} \cdot b$, dus in:

II. $a = (2^{p+1} - 1) \cdot b$.

$$2^{p+1} \cdot a = 2^{p+1} \cdot S(a) - S(a)$$
$$2^{p+1} \cdot a = 2^{p+1} \cdot S(a) - 2^{p+1} \cdot b$$
$$a = S(a) - b.$$

III. $S(a) = a + b$.

Volgens II is b een deler van a en, omdat $(2^{p+1} - 1) > 1$, is b kleiner dan a.

III drukt uit, dat de som van de delers van a $a + b$ is; omdat a en b beide delers van a zijn ($b < a$), zijn er geen andere delers: a is een priemgetal; $b = 1$.

Dus $n = 2^p \cdot (2^{p+1} - 1)$, waarbij $2^{p+1} - 1$ een priemgetal is.

Omgekeerd geldt, als $n = 2^p \cdot (2^{p+1} - 1)$ en $2^{p+1} - 1$ is priem:

$$S(n) = \frac{2^{p+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{(2^{p+1} - 1)^2 - 1}{(2^{p+1} - 1) - 1} =$$

$$= (2^{p+1} - 1)\,\frac{2^{2p+2} - 2^{p+2}}{2^{p+1} - 2} =$$

$$= (2^{p+1} - 1) \cdot 2^{p+1} = 2 \cdot n\,.$$

Dus n is een volkomen getal.

Een even getal is dan en dan alleen volkomen, als het geschreven kan worden in de vorm $2^p(2^{p+1} - 1)$, en $2^{p+1} - 1$ *een priemgetal is.*

$p = 1$; $n = 2 \cdot 3 = 6$; 3 is een priemgetal,
6 is een volkomen getal.
$p = 2$; $n = 4 \cdot 7 = 28$; 7 is een priemgetal,
28 is volkomen.
$p = 3$; $n = 8 \cdot 15 = 120$; 15 is niet priem;
120 is niet volkomen.

Andere volkomen getallen vinden we door voor p te nemen 4, 6, 12, 16, 18, 30, 60.

$p = 4$; $n = 16 \cdot 31 = 496$.
$p = 6$; $n = 64 \cdot 127 = 8128$.
$p = 12$; $n = 4096 \cdot 8191 = 33550336$.

VIII. REPETERENDE BREUKEN

ONTSTAAN

§165. De ontwikkeling van $\frac{5}{8}$ tot een decimale breuk kan als volgt geschieden:

```
8/5   \0,625
 48
 --
  20
  16
  --
   40
   40
   --
    0
```

$\frac{5}{7}$ is volgens eigenschap B_{11} niet om te zetten in een tiendelige breuk (de noemer bevat immers niet uitsluitend factoren 2 en/of 5). Bij het uitvoeren van bovenstaande algoritme ontstaat:

```
7/5            \0,714285714...
 49
 --
  10
   7
  --
   30
   28
   --
    20
    14
    --
     60
     56
     --
      40
      35
      --
       50
       49
       --
        10
         7
        --
         30
         28
         --
          2
```

We constateren, en zullen dit in de volgende paragraaf bewijzen, dat een bepaalde groep decimalen (714285) steeds terugkeert, omdat een rest (hier 5) steeds terugkeert.

De breuk die ontstaat, wordt *repeterende breuk* genoemd.

De groep cijfers die 'repeteert' is hier 714285; deze cijferrij heet het *repetendum* of het repeterende deel.

Het aantal cijfers van het repetendum, in dit geval 6, is de *periode*.

Het repeteren wordt aangegeven door het repetendum één keer op te schrijven en het eerste en laatste cijfer van een schuine streep te voorzien:

$$\frac{5}{7} = 0{,}\not{7}1428\not{5}.$$

De breuk (hier $\frac{5}{7}$), waaruit de repeterende breuk ontstaat, heet de *voortbrengende breuk*.

De ontwikkeling van $\frac{3}{26}$ tot repeterende breuk verloopt als volgt:

```
26/3          \0,115384615...
   26
   --
    40
    26
    --
    140
    130
    ---
     100
      78
     ---
     220
     208
     ---
      120
      104
      ---
       160
       156
       ---
         40
         26
         --
        140
```

$$\frac{3}{26} = 0{,}1\not{1}5384\not{6}.$$

Bij $0{,}\dot{7}1428\dot{5}$ volgt het repetendum onmiddellijk na de komma; in dergelijke gevallen spreekt men van een *zuiver repeterende* breuk.

Indien tussen komma en het eerste repetendum nog één of meer cijfers staan, zoals bij $0{,}1\dot{1}5384\dot{6}$, noemt men de repeterende breuk een *gemengd repeterende* breuk.

ZUIVER REPETERENDE BREUKEN

Zuiver repeterende breuken in het tientallig stelsel

§166. Gegeven de onvereenvoudigbare, echte breuk $\frac{t}{p}$; p is onderling ondeelbaar met 10.

a. Bij uitvoering van de delingsalgoritme (zie §80) ontstaan hoogstens $p - 1$ verschillende resten; immers bij een niet-opgaande deling met deler p kunnen als resten optreden de natuurlijke getallen kleiner dan p. (Er is hier sprake van een niet-opgaande deling, omdat de breuk $\frac{t}{p}$ anders tot een tiendelige breuk te herleiden is.)

Deze resten van de deling noemen we achtereenvolgens $r_0\ (= t)$, $r_1, r_2 \ldots r_{p-2}$. Na hoogstens $p - 1$ delingen keert een rest terug, die al in de rij van voorgaande resten moet voorkomen (stel r_l is de eerste rest die gelijk is aan de reeds eerder verschenen rest r_k).

De delingsalgoritme verloopt na r_l geheel op dezelfde wijze als na r_k, dus zullen de cijfers van het quotiënt repeteren.

Opmerking: Het bovenstaande impliceert *niet*, dat het repeteren na $p - 1$ delingen begint; wèl dat het na hoogstens $p - 1$ delingen zal geschieden. Anders gezegd: het aantal cijfers van het repetendum is hoogstens gelijk aan $p - 1$.

b. We zullen nu aantonen, dat in het bovenstaande geval de breuk *zuiver* repeteert, d.w.z. dat het eerste cijfer na de komma het eerste cijfer van het repetendum is.

$$
\begin{array}{l}
p/t \quad \backslash 0,a_1 a_2 a_3 \ldots \\
\underline{a_1 p} \\
\quad \overline{r_1 0} \\
\quad \underline{a_2 p} \\
\qquad \overline{r_2 0} \\
\qquad \underline{a_3 p} \\
\qquad\quad \searrow \\
\qquad\qquad \overline{r_k 0} \\
\qquad\qquad\quad \searrow \\
\qquad\qquad\quad \underline{} \\
\qquad\qquad\quad r_l
\end{array}
$$

r_1 is de rest, die $10t$ overlaat bij deling door p.
r_2 is de rest, die 10^2t overlaat bij deling door p.
:
r_k is de rest, die $10^k t$ overlaat bij deling door p.
r_l is de rest, die $10^l t$ overlaat bij deling door p.

Stel, dat r_l gelijk is aan r_k. Dit betekent, dat $10^k t$ en $10^l t$ bij deling door p dezelfde rest opleveren.
$10^l t - 10^k t$ is deelbaar door p
(hierbij nemen we aan, dat l en k zo klein mogelijk zijn; $l > k$)
$10^k (10^{l-k} t - t)$ is deelbaar door p
Daar 10^k en p onderling ondeelbaar zijn, is volgens eig. Db_{19} $10^{l-k} t - t$ deelbaar door p, d.w.z. dat $10^{l-k} t$ dezelfde rest geeft als $t = r_0$.

Hieruit volgt dat de breuk *zuiver repeteert*, terwijl de *periode gelijk is aan de exponent van de kleinste macht van 10, die, verminderd met 1, deelbaar is door de noemer*. Deze exponent is hoogstens gelijk aan $p - 1$.

Toepassing: $\frac{t}{101}$ $(t < 101)$ geeft bij ontwikkeling tot een repeterende breuk een *zuiver* repeterende breuk, want 101 is onderling ondeelbaar met 10. Gevraagd de periode.
We delen de met één verminderde machten van 10 door 101:

$10^1 - 1 = 9 \quad \rightarrow$ rest 9
$10^2 - 1 = 99 \quad \rightarrow$ rest 99
$10^3 - 1 = 999 \quad \rightarrow$ rest 90
$10^4 - 1 = 9999 \rightarrow$ rest 0

De periode van de zuiver repeterende breuk is 4.

Voorbeeld: 101/17 \0,1683

```
101/17  \0,1683
 101
 ───
  690
  606
  ───
   840
   808
   ───
    320
    303
    ───
     17
```

$$\frac{17}{101} = 0,\dot{1}68\dot{3}.$$

Zuiver repeterende breuken in het g-tallig stelsel

§167. Analoog met de behandeling in het tientallig stelsel (zie vorige paragraaf) kan ook in een talstelsel met grondtal g een onvereenvoudigbare breuk ontwikkeld worden in een zuiver repeterende g-delige breuk, indien de noemer onderling ondeelbaar met g is.

Zo is bijvoorbeeld $\frac{5}{7}$ (negentallig stelsel)

7/5 \0,$\dot{6}3\dot{7}$ (negentallig)

```
7/5  \0,637
 46
 ──
  30
  23
  ──
   60
   54
   ──
    5
```

De periode van 0,$\dot{6}3\dot{7}$ is 3, want 10^3-1 is deelbaar door 7 (negentallig stelsel) en 10^2-1 en 10^1-1 zijn niet deelbaar door 7 (negentallig stelsel).

§168. Gegeven de zuiver repeterende breuk

$0,\dot{a}_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \dot{a}_p$, ook wel genoteerd als

$0,\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p}$.

Dit is een korte schrijfwijze voor

$$\frac{\overline{|a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p|}}{10^p} + \frac{\overline{|a_1 a_2 a_3 \ldots a_p|}}{10^{2p}} + \frac{\overline{|a_1 a_2 a_3 \ldots a_p|}}{10^{3p}} + \ldots$$

(oneindig veel termen)

Dit is de som van een oneindig voortlopende meetkundige rij met als beginterm $\frac{\overline{|a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p|}}{10^p}$ en als reden $\frac{1}{10^p}$.

$$\frac{1}{10^p} < 1$$

dus (zie §160)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\dfrac{\overline{|a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p|}}{10^p}}{1 - \dfrac{1}{10^p}} = \frac{\overline{|a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p|}}{10^p - 1}.$$

Regel: Een zuiver repeterende breuk is gelijk aan de breuk met als teller het repetendum en als noemer het getal bestaande uit zoveel negens als de periode bedraagt.

Opmerking: In het g-tallig stelsel geldt ook bovenstaande regel, met dien verstande, dat de negens vervangen worden door het grootste cijfer ($= g - 1$) in dat stelsel.
Bijvoorbeeld:

$$0,\dot{2}7\dot{3} = \frac{273}{999} = \frac{91}{333}.$$

Een andere afleiding (*methode van Euler*) is:

$$\begin{aligned} g &= 0,\dot{2}7\dot{3} \\ 1000\,g &= 273,\dot{2}7\dot{3} \\ g &= 0,\dot{2}7\dot{3} \quad - \\ \hline 999\,g &= 273 \\ g &= \frac{273}{999} = \frac{91}{333}. \end{aligned}$$

Hoewel deze afleiding het juiste resultaat geeft, is de afleiding rekenkundig niet geheel zuiver, daar de aftrekking van twee getallen die beide een oneindig aantal cijfers achter de komma hebben, niet gedefinieerd is.

§169. Een onvereenvoudigbare breuk, waarvan de noemer naast factoren die onderling ondeelbaar met 10 zijn, factoren 2 en/of 5 bevat, geeft bij herleiding een gemengd repeterende breuk.

Voorbeeld:

$$\frac{t}{2^2 \cdot 5 \cdot p}.$$

Na vermenigvuldiging met 10^2 gaat de breuk over in $\frac{5t}{p}$, die na afsplitsing van een eventueel aantal gehelen een breuk geeft die overgaat in een zuiver repeterende breuk. Deling door 10^2 (verschuiving van de komma 2 plaatsen naar links) levert dan een gemengd repeterende breuk op, waarvan de eerste twee cijfers niet repeteren (het bewijs, dat deze twee cijfers niet gelijk zijn aan de laatste twee cijfers van het repetendum, zodat het repetendum niet twee plaatsen naar voren kan schuiven, geven we hier niet).

Bijvoorbeeld:

$$g = \frac{73}{820} = \frac{73}{2^2 \cdot 5 \cdot 41}$$

$$100g = \frac{365}{41} = 8\frac{37}{41} = 8,\dot{9}024\dot{3}$$

$$g = 0,08\dot{9}024\dot{3}.$$

Het aantal niet-repeterende cijfers bij herleiding tot een gemengd repeterende breuk, is gelijk aan het grootste aantal van het aantal factoren 2 en het aantal factoren 5 die de noemer van de onvereenvoudigbare breuk, waaruit de gemengd repeterende breuk wordt afgeleid, bevat.

§170. Gegeven: De gemengd repeterende breuk $0,ab\dot{c}de\dot{f}$.

Deze breuk is gelijk aan:

$$\frac{|\overline{ab}|}{10^2} + \frac{|\overline{cdef}|}{(10^4-1)10^2} = \frac{|\overline{ab}| \cdot (10^4 - 1) + |\overline{cdef}|}{(10^4 - 1)10^2} =$$

$$= \frac{|\overline{abcdef}| - |\overline{ab}|}{(10^4 - 1)10^2}.$$

Voorbeeld:

$$0{,}25\dot{7}46\dot{3} = \frac{257463 - 25}{(10^4 - 1)10^2} = \frac{257438}{999900}.$$

Aan de hand hiervan kunnen we de volgende regel opstellen:

Regel: Een gemengd repeterende breuk is gelijk aan de breuk, waarvan de teller gelijk is aan het getal gevormd door de niet-repeterende cijfers gevolgd door het repetendum, verminderd met het getal gevormd door de niet-repeterende cijfers, en waarvan de noemer gelijk is aan het getal gevormd door zoveel negens als de periode bedraagt gevolgd door zoveel nullen als het aantal niet-repeterende cijfers bedraagt.

Het berekenen van de voortbrengende breuk met de methode van Euler verloopt als volgt:

$$\begin{array}{rcl} g &=& 0{,}25\dot{7}46\dot{3} \\ 1000\,000\, g &=& 257463{,}\dot{7}46\dot{3} \\ 100\, g &=& 25{,}\dot{7}46\dot{3} \\ \hline 999\,900\, g &=& 257438 \\ g &=& \dfrac{257438}{999900}. \end{array} \quad -$$

EIGENSCHAPPEN VAN HET REPETENDUM

§171. 1. $\frac{1}{7} = 0{,}\dot{1}4285\dot{7}$.

Als we 1 door 7 delen (zie §165), komen de resten 1 tot en met 6 alle voor (in een bepaalde volgorde).

Hieruit volgt, dat bij ontwikkeling van bijv. $\frac{4}{7}$ tot een repeterende breuk met behulp van de delingsalgoritme, we a.h.w. beginnen bij de rest 4, die ook in de delingsalgoritme van $\frac{1}{7}$ voorkomt. Dit betekent, dat we bij $\frac{4}{7}$ een repetendum krijgen dat dezelfde cijfers (in 'dezelfde volgorde') heeft als het repetendum dat ontstaat bij ontwikkeling van $\frac{1}{7}$.

Het repetendum van $\frac{1}{7}$ is a.h.w. verschoven.

```
7/1,0    \0,1428571428        7/4,0   \0,571428
  7        ⏟                   35
  30       |                    50
  28       ↓                    49
   20    repetendum              10
   14    van 4/7                  7
    60                            30
    56                            28
     40                            20
     35                            14
      50                            60
      49                            56
       10                            4
        7
        30
        28
         20
         14
          60
          56
           4
```

(In the quotient $0,\overline{142857}1428$ the line is printed over 142857, and the brace under 571428 points to "repetendum van $\frac{4}{7}$".)

We kunnen dit (voor $\frac{4}{7}$) ook als volgt zien:

$$100 \times \frac{4}{7} = \frac{400}{7} = 57\tfrac{1}{7} = 57,\dot{1}4285\dot{7}$$

$$\frac{4}{7} = 0,\dot{5}7142\dot{8}.$$

Om de echte breuken met noemer 7 als repeterende breuken te schrijven, kunnen we het volgende schema gebruiken:

noemer 7	1	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5
	↑	↑	↑	↑	↑	↑					
teller ⟶	1	3	2	6	4	5					

$\frac{3}{7} = 0,\dot{4}2857\dot{1}.$

$\frac{6}{7} = 0,\dot{8}5714\dot{2}.$

Bij breuken met noemer 13 spelen twee repetendums een rol:

$\frac{1}{13} = 0{,}\dot{0}7692\dot{3}$ en $\frac{2}{13} = 0\dot{1}5384\dot{6}$.

Dit geeft het volgende schema:

noemer 13											
	0	7	6	9	2	3 \|	0	7	6	9	2
	↑	↑	↑	↑	↑	↑					
teller	1	10	9	12	3	4					
	1	5	3	8	4	6 \|	1	5	3	8	4
	↑	↑	↑	↑	↑	↑					
teller →	2	7	5	11	6	8					

$\frac{12}{13} = 0{,}\dot{9}2307\dot{6}$.

$\frac{8}{13} = 0{,}\dot{6}1538\dot{4}$.

2. Gegeven $\frac{5}{13} = 0.\dot{3}8461\dot{5}$.

Bepaal (zonder bovenstaand schema) a. $\frac{8}{13}$; b. $\frac{2}{13}$.

Oplossing:

a. $\frac{5}{13} + \frac{8}{13} = 1 = 0{,}\dot{9} = 0{,}\dot{9}9999\dot{9}$ (dit 'verlengen' van het repetendum passen we bij berekeningen wel vaker toe)

$$1 = 0{,}\dot{9}9999\dot{9}$$
$$\frac{5}{13} = 0{,}\dot{3}8461\dot{5} \quad \text{(zie §172)}$$
$$\frac{8}{13} = 0{,}\dot{6}1538\dot{4}.$$

b. $\frac{2}{13} = 10 \times \frac{8}{13} - 6 = 6{,}\dot{1}5384\dot{6} - 6 = 0{,}\dot{1}5384\dot{6}$.

We belichten een eigenschap aan de hand van een voorbeeld:

3. $\frac{1}{13} = 0{,}\dot{0}7692\dot{3}$.

Splitsing in twee groepen leidt tot

$$\begin{array}{r} 076 \\ 923 \\ \hline 999 \end{array} +$$

Splitsing in drie groepen geeft

$$\begin{array}{r} 07 \\ 69 \\ 23 \\ \hline 99 \end{array} +$$

Splitsing in enkele cijfers:

$$
\begin{array}{r}
0 \\
7 \\
6 \\
9 \\
2 \\
3 \\
\hline
27 \; + \\
\hookrightarrow 2 \\
\hline
9
\end{array}
$$

Een bewijs van deze algemeen geldende eigenschap bij splitsing van het repetendum in drie groepen, aan de hand van bovenstaand voorbeeld, luidt aldus:

$$\tfrac{1}{13} = 0,\dot{0}7692\dot{3}$$

$$\tfrac{1}{13} = \frac{076923}{10^6 - 1}$$

$$\tfrac{1}{13} = \frac{07 \cdot 10^4 + 69 \cdot 10^2 + 23}{10^6 - 1}$$

$$10^6 - 1 = 13\{07 \cdot (10^4 - 1) + 69 \cdot (10^2 - 1) + \\ + (07) + (69) + (23)\}.$$

Het linkerlid is deelbaar door $10^2 - 1$, het rechterlid dus ook. 13 is onderling ondeelbaar met $10^2 - 1$, dus is volgens eig. Db_{19} de vorm tussen accoladen deelbaar door $10^2 - 1$.

$10^4 - 1$ en $10^2 - 1$ zijn deelbaar door $10^2 - 1$, zodat $07 + 69 + 23$ een veelvoud van 99 is.

OPTELLEN EN AFTREKKEN MET REPETERENDE BREUKEN

§172. a. Repeterende breuk en decimale breuk

$$
\begin{array}{l}
3,25\dot{4}3\dot{1} \\
2,368 \\
\hline
5,622\dot{3}1\dot{4}
\end{array}
\; +
$$

Soms kan een cijfer van het 'niet-repeterend' deel gevoegd worden bij het repeterend deel, bijvoorbeeld:

$2{,}1\dot{4}35\dot{6}$

$3{,}5$

$5{,}6\dot{4}35\dot{6}$ $+$ $\rightarrow 5{,}\dot{6}43\dot{5}$.

b. Twee repeterende breuken

$5{,}34\dot{7}2\dot{6} \rightarrow 5{,}34\dot{7}2672\dot{6}$

$2{,}\dot{2}\dot{3} \rightarrow 2{,}23\dot{2}3232\dot{3}$

$7{,}57\dot{9}5904\dot{9}$ $+$

$2{,}\dot{3}58\dot{4}$

$3{,}\dot{6}21\dot{3}$

$5{,}\dot{9}79\dot{7}$ $+$ $\rightarrow 5{,}\dot{9}\dot{7}$

$5{,}23\dot{3}\dot{7} \rightarrow 5{,}23\dot{3}7373\dot{7}$

$6{,}72\dot{4}8211\dot{8} \rightarrow 6{,}72\dot{4}8211\dot{8}$

$11{,}95\dot{8}5585\dot{5}$ $+$ $\rightarrow 11{,}9\dot{5}8\dot{5}$

$14{,}\dot{3}\dot{5} \rightarrow 14{,}\dot{3}5353\dot{5}$

$2{,}\dot{7}0\dot{3}$ $-$ $\rightarrow 2{,}\dot{7}0370\dot{3}$

$11{,}\dot{5}4983\dot{1}$ $-$

$8{,}\dot{3}\dot{7}$

$2{,}1\dot{7}\dot{3}$

$6{,}2$ $-$

Als bij het optellen of aftrekken van twee repeterende breuken een repeterende breuk ontstaat, heeft het repetendum van de som (het verschil) een periode die een deler is van het K.G.V. van de perioden van de repetendums van beide termen (van aftrektal en aftrekker).

Een 'bewijs', dat $0{,}\dot{9} = 1$, verkrijgen we door bijv. $0{,}\dot{8}$ bij $0{,}\dot{9}$ op te tellen en de som met $0{,}\dot{8}$ te verminderen:

$0{,}\dot{9}$

$0{,}\dot{8}$

$1{,}\dot{8}$ $+$

$0{,}\dot{8}$

1 $-$

§173.

$$\begin{array}{r l}
1,\dot{3}2\dot{5} & \\
58 & \\
\hline
10\,600 & \times \\
66\,250 & \\
\hline
76,850 & + \\
18 & \\
\hline
76,\dot{8}6\dot{8} & +
\end{array}$$

76 is 18 meer dan 58×1;
d.w.z. dat 58×325 elk vorig repetendum met 18 vergroot.

$$\begin{array}{r l}
2,\dot{9}\dot{8} & \\
392 & \\
\hline
5\,96 & \times \\
268\,20 & \\
894\,00 & \\
\hline
1168,16 & + \\
3\,84 & \\
3 & \\
\hline
1172,03 & + \\
1 & \\
\hline
1172,\dot{0}\dot{4} & +
\end{array}$$

$$1168 - 392 \times 2 =$$
$$= 1168 - 784 = 384.$$

Als we een repeterende breuk moeten vermenigvuldigen met een *decimale* breuk, vermenigvuldigen we eerst deze decimale breuk met een zodanige macht van 10, dat de breuk een geheel getal wordt. Na vermenigvuldiging wordt het produkt door dezelfde macht van 10 gedeeld (door verplaatsing van de komma).

IX. EVENREDIGHEDEN EN VERHOUDINGEN

DEFINITIE

§174.

Een evenredigheid is de formule, die de gelijkheid van twee quotiënten tot uitdrukking brengt.

$a : b = c : d \quad (b \neq 0;\ d \neq 0)$

We spreken dit uit als '*a* staat tot *b* als *c* staat tot *d*'.

Elk quotiënt van een evenredigheid noemen we meestal: *verhouding* of *reden.*

We kunnen dus ook zeggen:

Een evenredigheid is de formule, die de gelijkheid van twee verhoudingen uitdrukt.

$a : b = c : d$ kan men dus ook als volgt onder woorden brengen: '*a* en *b* verhouden zich als *c* en *d*'.

$4 : 8 = 10 : 20$

$1\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 10 : 1$

Als *c* en *d* gehele getallen zijn, noemt men *c* en *d* de *verhoudingsgetallen* van *a* en *b*. Het is altijd mogelijk de verhoudingsgetallen onderling ondeelbaar te doen zijn.

In het algemeen geldt het volgende:

a, *b*, *c* en *d* heten de *termen* van de evenredigheid;
a en *b* zijn de termen van de *eerste reden* (verhouding);
c en *d* zijn de termen van de *tweede reden*;
a en *c* zijn de *voorgaande* termen;
b en *d* zijn de *volgende* termen;
a en *d* zijn de *uiterste* termen;
b en *c* zijn de *middelste* termen.

EIGENSCHAPPEN VAN DE VERHOUDINGEN

§175. Daar verhoudingen quotiënten zijn, komen de eigenschappen van verhoudingen overeen met die van de quotiënten:

hier volgen enige eigenschappen; voor de bewijzen verwijzen we naar de overeenkomstige eigenschap van quotiënten (tussen haakjes).

Eig. Vh_1. Een verhouding verandert niet van waarde als men beide termen met hetzelfde getal vermenigvuldigt. (D_2)

Eig. $_1Vh$. Een verhouding verandert niet van waarde als men beide termen door hetzelfde getal deelt. ($_2D$)

Eig. Vh_2. Een verhouding wordt met een getal vermenigvuldigd, door de eerste term met dat getal te vermenigvuldigen of door de tweede term door dat getal te delen. (D_3 en D_4)

Eig. Vh_3. Een verhouding wordt door een getal gedeeld, door de eerste term door dat getal te delen of door de tweede term met dat getal te vermenigvuldigen. (D_5 en D_6)

Eig. Vh_4. Een macht van een verhouding is gelijk aan de verhouding van de gelijknamige machten van de beide termen. (M_2)

Eig. Vh_5. Een wortel uit een verhouding is gelijk aan de verhouding van de gelijknamige wortels uit elk der termen. (W_2)

EIGENSCHAPPEN VAN DE EVENREDIGHEDEN

§176. De hoofdeigenschap van de evenredigheden luidt:

Eig. E_1. In een evenredigheid is het produkt van de uiterste termen gelijk aan het produkt van de middelste termen.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $ad = bc$.

Bewijs:

$$a : b = c : d$$
$$(a : b) \cdot bd = (c : d) \cdot db$$
$$\{(a : b) \cdot b\} \cdot d = \{(c : d) \cdot d\} \cdot b$$
$$a \cdot d = c \cdot b \rightarrow ad = bc.$$

§177. Het omgekeerde van de hoofdeigenschap van de evenredigheden is:

Eig. ₁E. Als van vier getallen het produkt van eerste en vierde gelijk is aan het produkt van tweede en derde, vormen die getallen in deze volgorde een evenredigheid.

Gegeven: a, b, c en d; $ad = bc$.

Te bewijzen: $a : b = c : d$.

Bewijs:

$$a \cdot d = b \cdot c$$
$$a \cdot d : d \cdot b = b \cdot c : b \cdot d$$
$$a : b = c : d.$$

Opmerking: Eigenschappen E_1 en $_1E$ kan men als volgt combineren:

Opdat $a : b = c : d$, is nodig en voldoende dat $ad = bc$.

§178. In verband met eigenschappen E_1 en $_1E$ kan men uit een gegeven evenredigheid nieuwe evenredigheden vormen door de termen anders te rangschikken. Hierbij heeft men slechts te zorgen, dat de twee uiterste termen in de nieuwe evenredigheid allebei uiterste of allebei middelste termen zijn.

Men krijgt dan:

$$a : b = c : d$$
$$a : c = b : d$$
$$d : b = c : a$$
$$d : c = b : a$$
$$b : a = d : c$$
$$b : d = a : c$$
$$c : a = d : b$$
$$c : d = a : b.$$

Eig. E_2. Als men de termen van een evenredigheid zó rangschikt, dat de uiterste termen van de gegeven evenredigheid allebei uiterste termen blijven of middelste termen worden, ontstaat een evenredigheid.

§179.

Eig. E_3. Als men van een evenredigheid de termen van de eerste reden (de tweede reden) met hetzelfde getal vermenigvuldigt, ontstaat een evenredigheid.

In formule: $a : b = c : d \rightarrow k \cdot a : k \cdot b = c : d$.

Bewijs: Volgens eigenschap Vh_1 heeft de verhouding $ka : kb$ dezelfde waarde als $a : b$; uit $a : b = c : d$ volgt dus $ka : kb = c : d$.

De tweede lezing (van rechts naar links) geeft:

Eig. $_3E$. Als men van een evenredigheid de termen van de eerste reden (de tweede reden) door hetzelfde getal deelt, ontstaat een evenredigheid.

Eig. E_4. Als men van een evenredigheid de voorgaande termen met hetzelfde getal vermenigvuldigt, ontstaat een evenredigheid.
In formule: $a : b = c : d \rightarrow k \cdot a : b = k \cdot c : d$.

Bewijs: Stel $a : b = v$, dan is

$c : d = v$
$ka : b = kv$ volgens eig. Vh_2
$kc : d = kv$
$k \cdot a : b = k \cdot v = k \cdot c : d$ dus
$k \cdot a : b = k \cdot c : d$.

De tweede lezing luidt:

Eig. $_4E$. Als men van een evenredigheid de voorgaande termen door hetzelfde getal deelt, ontstaat een evenredigheid.

Eig. E_5. Als men van een evenredigheid de volgende termen met hetzelfde getal vermenigvuldigt, ontstaat een evenredigheid.

Volgens eig. Vh_3 betekent dit, dat elke verhouding door hetzelfde getal wordt gedeeld, zodat uit de gelijke verhoudingen gelijke verhoudingen ontstaan.

De tweede lezing luidt:

Eig. $_5E$. Als men van een evenredigheid de volgende termen door hetzelfde getal deelt, ontstaat een evenredigheid.

§180.

Eig. E_6. In een evenredigheid geldt: som (verschil) termen eerste reden staat tot som (verschil) termen tweede reden als eerste term staat tot derde term of als tweede term staat tot vierde term.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $(a + b) : (c + d) = a : c$.

Bewijs:

Stel $a : b = k$ dus $a = bk$
$c : d = k$ dus $c = dk$
$a + b = bk + b = b \cdot (k + 1)$
$c + d = dk + d = d \cdot (k + 1)$
$(a + b) : (c + d) = b \cdot (k + 1) : d \cdot (k + 1) = b : d =$
$= a : c$.

Voor het verschil loopt het bewijs analoog.

Door eerst de middelste termen te verwisselen krijgt men:

Eig. E7. In een evenredigheid geldt: som (verschil) voorgaande termen staat tot som (verschil) volgende termen als een voorgaande term staat tot zijn volgende term.

§181.

Eig. E8. De gelijknamige machten van de termen van een evenredigheid vormen een evenredigheid.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $a^n : b^n = c^n : d^n$.

Bewijs: $a : b = c : d = k$

$a^n : b^n = k^n$ (eig. Vh4)
$c^n : d^n = k^n$ dus
$a^n : b^n = k^n = c^n : d^n$
$a^n : b^n = c^n : d^n$.

Eig. E9. De gelijknamige wortels uit de termen van een evenredigheid vormen een evenredigheid.

Gegeven: $a : b = c : d$.

Te bewijzen: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Bewijs: $a : b = c : d$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{k}$ (eig. Vh5)
$\sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{k}$ (eig. Vh5)
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ $(= \sqrt[n]{k})$.

§182.

Eig. E_{10}. De produkten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een evenredigheid.

Gegeven: $a : b = c : d$; $p : q = r : s$.

Te bewijzen: $ap : bq = cr : ds$.

Bewijs:

$$\begin{aligned}
&\text{Stel } a : b = v, \quad \text{dus } a = vb \text{ en } c = vd\\
&\text{stel } p : q = w, \quad \text{dus } p = wq \text{ en } r = ws\\
&ap : bq = vbwq : bq = vw : 1\\
&cr : ds = vdws : ds = vw : 1\\
&ap : bq = vw : 1 = cr : ds\\
&ap : bq = cr : ds.
\end{aligned}$$

Eig. E_{11}. De quotiënten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een evenredigheid.

Gegeven: $a : b = c : d$; $p : q = r : s$.

Te bewijzen: $\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{r} : \frac{d}{s}$.

Bewijs:

$$\begin{aligned}
&\text{Stel } a : b = v \rightarrow a = vb \quad c = vd\\
&\text{stel } p : q = w \rightarrow p = wq \quad r = ws\\
&\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{vb}{wq} : \frac{b}{q} = \frac{v}{w} : 1\\
&\frac{c}{r} : \frac{d}{s} = \frac{vd}{ws} : \frac{d}{s} = \frac{v}{w} : 1\\
&\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{v}{w} : 1 = \frac{c}{r} : \frac{d}{s}\\
&\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{r} : \frac{d}{s}.
\end{aligned}$$

§183. Indien in formule de gelijkheid van meer dan twee verhoudingen wordt uitgedrukt (in de vorige paragrafen is dit al enige keren gebeurd) spreken we van een *aaneengeschakelde evenredigheid*. Bijvoorbeeld $6 : 9 = 4 : 6 = 10 : 15$.

Twee grootheden (getallen) noemen we *recht evenredig* afhankelijk, als twee waarden van de ene grootheid en twee over-

eenkomstige waarden van de andere grootheid een evenredigheid vormen. Bijvoorbeeld twee getallen en hun drievouden zijn recht evenredig: $a : b = 3a : 3b$.

Twee grootheden (getallen) noemen we *omgekeerd evenredig* afhankelijk, als een waarde van de ene grootheid en de overeenkomstige waarde van de andere grootheid een constant produkt heeft. Bijvoorbeeld twee getallen en hun omgekeerden zijn omgekeerd evenredig:

$$\left.\begin{array}{ll} a & \frac{1}{a} \rightarrow \text{produkt } 1 \\ b & \frac{1}{b} \rightarrow \text{produkt } 1 \end{array}\right\} a : b = \frac{1}{b} : \frac{1}{a}.$$

Zo zijn van twee rechthoeken met dezelfde oppervlakte (O) de lengten en de breedten omgekeerd evenredig.

$$l_1 \times b_1 = \text{O} \qquad l_2 \times b_2 = \text{O}$$
$$l_1 : l_2 = b_2 : b_1.$$

Een voorbeeld van toepassing van de theorie van de evenredigheden:

Gegeven: $(x + 2) : (4x - 4) = (3x - 4) : (12x - 32)$.

Gevraagd: Bereken x, zonder hoofdeigenschap.
Oplossing: Eig. E_4, voorgaande termen met 4 vermenigvuldigen

$$\begin{array}{lll} & & (4x + 8) : (4x - 4) = (12x - 16) : (12x - 32) \\ E_6 & \rightarrow & 12 : 16 = (4x + 8) : (12x - 16) \\ {}_3E & \rightarrow & 3 : 4 = (x + 2) : (3x - 4) \\ E_4 & \rightarrow & 9 : 4 = (3x + 6) : (3x - 4) \\ E_6 & \rightarrow & 5 : 10 = 9 : (3x + 6) \\ {}_3E & \rightarrow & 1 : 2 = 3 : (x + 2) \\ E_7 & \rightarrow & 2 : x = 1 : 2 \\ & & 2 : x = 2 : 4 \rightarrow x = 4. \end{array}$$

KETTINGBREUKEN EN BETREKKINGSWIJZER

§184. De verhouding 22 : 160 kunnen we aangeven door de breuk $\frac{22}{160}$. Deze breuk kunnen we herleiden tot de volgende *kettingbreuk*:

$$\frac{22}{160} = \frac{1}{7+\frac{6}{22}} = \frac{1}{7+\cfrac{1}{3+\frac{4}{6}}} = \frac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Deze kettingbreuk noteren we door alleen de noemers op te schrijven. Op deze manier krijgen we de zgn. *betrekkingswijzer* $\{7;\ 3;\ 1;\ 2\}$, waarbij 7, 3, 1 en 2 de *wijzergetallen* heten. Is de betrekkingswijzer bekend, dan kan men als volgt de verhouding vinden:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 7 & 3 & 1 & 2 & \\ \hline & & & & 1 \end{array}$$

Men plaatst schuin rechts onder het laatste wijzergetal een 1. We vermenigvuldigen nu elk wijzergetal (rechts beginnend) met het getal dat er schuin rechts onder staat, vermeerderen dit produkt met het getal dat beneden rechts van de gebruikte factor staat, en plaatsen de uitkomst onder dit wijzergetal. Er ontstaat dan:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 7 & 3 & 1 & 2 & \\ \hline 80 & 11 & 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 \times 1 + 0 = 2; \text{ plaats de 2 onder de 2} \\ 1 \times 2 + 1 = 3; \text{ plaats de 3 onder de 1} \\ 3 \times 3 + 2 = 11; \text{ plaats de 11 onder de 3} \\ \text{enz.} \end{array}$$

We krijgen zo de verhoudingsgetallen (onderling ondeelbaar) van 22 en 160.

Als we de 1 (rechts onder) hadden vervangen door 2 (de G.G.D. van 22 en 160), was het volgende ontstaan:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 7 & 3 & 1 & 2 & \\ \hline 160 & 22 & 6 & 4 & 2 \end{array}$$

Merk op, dat als we de algoritme van Euclides (zie §100) onverkort toepassen, de quotiënten die ontstaan, de betrekkingswijzer vormen van de getallen waarvan we de G.G.D. bepalen.

De verhouding van de omtrek van de cirkel en zijn middellijn is een zgn. onmeetbaar getal (zie §223), dat we aanduiden door π (pi). Getallen, die deze waarde benaderen zijn $3\frac{1}{7}$ (Archimedes) en $\frac{355}{113}$, ook $\{3;7;15;1;292\}$. Met welke breuk komt dit overeen? Met welke breuken komen $\{3;7;15;1\}$, $\{3;7;15\}$ en $\{3;7\}$ overeen?

X. CONGRUENTIES

INLEIDING

§185. Als de gehele getallen a en b dezelfde rest overlaten bij deling door een natuurlijk getal m, noemen we a en b *congruent naar de modulus m*.

Notatie: $a \equiv b \pmod{m}$; spreek uit: 'a congruent b modulo m'.

Bijvoorbeeld $85 \equiv 25 \pmod{12}$, want de rest bij deling van 85 en 25 door 12 is 1.

Alle getallen die modulo m congruent zijn, vormen een *getalklasse* of *restklasse* (mod m). Bijv. 85, 25, 97, 1009 behoren tot dezelfde getalklasse (mod 12).

Modulo m bestaan er dus m getalklassen, aangezien een getal bij deling door m de getallen 0, 1, 2, ... $m - 1$ als rest kan opleveren.

Indien uit elk van de getalklassen één getal wordt genomen, ontstaat een *volledig restsysteem.*

Onder een volledig restsysteem modulo m verstaan we m getallen die modulo m niet congruent zijn.

Een *gereduceerd restsysteem* modulo m wordt gevormd door de getallen uit een volledig restsysteem, die onderling ondeelbaar zijn met m.

Volledig restsysteem (mod 7)

9, 5, 6, 14, 31, 18, 8.

Gereduceerd restsysteem (mod 12)

1, 17, 31, 23.

Het aantal getallen van een gereduceerd restsysteem (mod m) is het aantal getallen in de rij 1, 2, 3, 4, ... m die onderling ondeelbaar zijn met m.

Dit aantal is $\varphi(m)$ (zie §112).

§186.

Eig. C_1. Uit $a \equiv b$ (mod m) volgt $a - b \equiv 0$ (mod m).

Bewijs:

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ betekent}$$
$$a = k \cdot m + r$$
$$b = l \cdot m + r \quad -$$
$$a - b = k \cdot m - l \cdot m$$
$$= (k - l) \cdot m, \quad \text{dus}$$
$$a - b \equiv 0 \pmod{m}.$$

Eig. C_2. Uit $a \equiv b$ (mod m) volgt $n \cdot a \equiv n \cdot b$ (mod m).

Bewijs:

$$a \equiv b \pmod{m}$$
$$a = k \cdot m + r \rightarrow n \cdot a = n \cdot km + nr$$
$$b = l \cdot m + r \rightarrow n \cdot b = n \cdot lm + nr$$

Bij deling van na en nb door m zijn de resten gelijk aan de rest, die nr oplevert bij deling door m. Hieruit volgt:

$$n \cdot a \equiv n \cdot b \pmod{m}.$$

Eig. C_3. Uit $a \equiv b$ (mod m) volgt $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}$ (mod m), als k een gemene deler is van a en b die onderling ondeelbaar is met m.

Bewijs:

$a = r \cdot k$; $b = s \cdot k$; k is onderling ondeelbaar met m.
Uit $a \equiv b$ (mod m) volgt:

$$a - b \equiv 0 \pmod{m}$$
$$a - b = v \cdot m$$
$$r \cdot k - s \cdot k = v \cdot m.$$

Het linkerlid is deelbaar door k, het rechterlid dus ook. k en m zijn onderling ondeelbaar, dus is v deelbaar door k (eig. Db_{19})

$$(r - s) \cdot k = v' \cdot k \cdot m$$
$$r - s = v' \cdot m; \text{ anders genoteerd}$$
$$r \equiv s \pmod{m}$$
$$\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{m}.$$

Eig. C4. Uit $a \equiv b \pmod{m}$ volgt $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{m}{k}}$, als k een gemene deler is van a, b en m.

Bewijs:

$a = r \cdot k$; $b = s \cdot k$; $m = t \cdot k$ (r, s en t zijn natuurlijke getallen)

Uit $a \equiv b \pmod{m}$ volgt:

$a - b \equiv 0 \pmod{m}$

$a - b = v \cdot m$

$rk - sk = v \cdot tk$

$k \cdot (r - s) = k \cdot vt$

$r - s = vt$

$r \equiv s \pmod{t}$

$\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{m}{k}}$.

Toepassingen:

1. $72 \equiv 128 \pmod{14}$ geeft:
 $36 \equiv 64 \pmod{7}$
 $9 \equiv 16 \pmod{7}$.

2. Onder het oplossen van een congruentie verstaat men het bepalen van die waarden van de onbekende(n), die bij substitutie aan de congruentie voldoen. Los op:

 $24x \equiv 16 \pmod{14}$

 $12x \equiv 8 \pmod{7}$ C4
 $3x \equiv 2 \pmod{7}$ C3
 $3x \equiv 9 \pmod{7}$
 $x \equiv 3 \pmod{7}$ C3

 De oplossing wordt dus gevormd door de getalklasse 3 (mod 7); de *wortel* van de congruentie is 3 (mod 7), dus 3 en 10 (mod 14).

Zonder bewijs volgen hier nog de volgende eigenschappen:

Als $a \equiv b \pmod{m}$ en $c \equiv d \pmod{m}$, dan is:

Eig. C5. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;

Eig. C6. $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;

Eig. C7. $a \times c \equiv b \times d \pmod{m}$.

De bewijzen van deze eigenschappen verlopen analoog aan die van de voorgaande eigenschappen van congruenties.

We zullen nu nog nagaan of uit

$a \equiv b \pmod{m}$ en $c \equiv d \pmod{m}$ volgt dat

$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$, waarbij $\frac{a}{c}$ en $\frac{b}{d}$ uiteraard gehele getallen voorstellen.

Uit $a \equiv b \pmod{m}$ en $c \equiv d \pmod{m}$ volgt (eig. C_7)

$a \times d \equiv b \times c \pmod{m}$.

Deling van beide leden door $c \times d$ (hetgeen volgens het gegeven mogelijk is) geeft:

$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$, als $c \times d$ onderling ondeelbaar is met m; dus als zowel c als d onderling ondeelbaar zijn met m. Gegeven $c \equiv d \pmod{m}$ komt het dus hierop neer, dat de eigenschap geldt als c of d relatief priem is met m.

Eig. C_8. Als $a \equiv b \pmod{m}$ en $c \equiv d \pmod{m}$, en c is onderling ondeelbaar met m, geldt $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$.

Toepassing: Is $a^{36} \equiv 1 \pmod{37}$, ($a \not\equiv 0$, mod 37) terwijl ook

$a^9 \equiv 1 \pmod{37}$, dan is

$a^{27} \equiv 1$

$a^{18} \equiv 1$, enz. (mod 37).

LINEAIRE CONGRUENTIES MET PRIEMMODULUS

§187. Oplossing van de congruentie
$ax + b \equiv 0 \pmod{p}$.

We onderscheiden de volgende gevallen:

1. $a \equiv 0$; $b \not\equiv 0 \pmod{p}$.
 ax is dan een p-voud, b niet.
 De som $ax + b$ is dan geen p-voud en de congruentie is *vals*.

2. $a \not\equiv 0$; $b \equiv 0 \pmod p$.

$$ax + b \equiv 0 \pmod p \text{ gaat over in}$$
$$ax \equiv 0 \pmod p$$
$$x \equiv 0 \pmod p.$$

3. $a \equiv 0$; $b \equiv 0 \pmod p$.
Aan de congruentie $a \cdot x + b \equiv 0 \pmod p$ is voor elke waarde van x voldaan. De congruentie is *identiek*. Elke getalklasse modulo p voldoet.

4. $a \not\equiv 0$; $b \not\equiv 0 \pmod p$.
We tonen eerst aan, dat in de rij getallen
$1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \ldots, p \cdot a \pmod p$, waarin $a \not\equiv 0 \pmod p$, elke getalklasse modulo p voorkomt.

De rij bevat p getallen, die onderling niet congruent zijn en dus niet tot dezelfde getalklasse behoren. Was namelijk $k \cdot a \equiv l \cdot a \pmod p$, waarbij $k < p$ en $l < p$ is, dan zou uit $k \cdot a \equiv l \cdot a \pmod p$ volgen: $k = l$.

De rij bevat dus p getalklassen, en de getallenrij vormt dus een volledig restsysteem modulo p. Onder de p getalklassen bevindt zich één getalklasse congruent aan 1, bijv. $f \cdot a \equiv 1 \pmod p$.

Bij elk getal a bestaat dus een getalklasse f, zo dat het produkt van a en f congruent 1 is (mod p; a is geen p-voud).

De bedoelde getalklasse f geven we *symbolisch* aan door a^{-1}. a^{-1} wordt de *reciproke* van a genoemd. $a^{-1} \cdot a \equiv 1$. (In dit verband heeft a^{-1} dus *niet* de betekenis van $\frac{1}{a}$ zoals in de algebra.)

Is nu $ax + b \equiv 0 \pmod p$, dan geeft vermenigvuldiging van beide leden met a^{-1}:

$$a^{-1} \cdot a \cdot x + a^{-1} \cdot b \equiv 0 \pmod p$$
$$x + a^{-1} \cdot b \equiv 0 \pmod p.$$

Toepassing:

Los op $7x + 36 \equiv 0 \pmod{13}$
$$7x + 10 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Oplossing: 2 is de reciproke van 7 (mod 13), want $2 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{13}$; vermenigvuldiging van beide leden met 2 geeft

$$\begin{aligned} 2\cdot 7x + 20 &\equiv 0 \pmod{13} \\ x + 7 &\equiv 0 \pmod{13} \\ x - 6 &\equiv 0 \pmod{13} \\ x &\equiv 6 \pmod{13}. \end{aligned}$$

LINEAIRE CONGRUENTIES MET DEELBARE MODULUS

§188. $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$.
We beperken ons tot het geval $a \not\equiv 0$; $b \not\equiv 0 \pmod{m}$ en onderscheiden:

1. a en m onderling ondeelbaar.
Vermenigvuldiging van beide leden van de congruentie met de (ook nu bestaande) reciproke van a geeft

$$x + a^{-1}b \equiv 0 \pmod{m}.$$

Door deze vermenigvuldiging is een congruentie ontstaan die gelijkwaardig is met de gegeven congruentie, daar uit $a^{-1}\cdot a \equiv 1 \pmod{m}$ volgt, dat als a onderling ondeelbaar is met m, ook a^{-1} ondeelbaar met m zal zijn.
Uit $x + a^{-1}b \equiv 0 \pmod{m}$ wordt de wortel gevonden.

2. a en m onderling deelbaar.
Zijn a en m onderling deelbaar, bijv. $a = kd$ en $m = ld$, dan gaat de congruentie $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$ over in $kd\cdot x + b \equiv 0 \pmod{ld}$.
Is b nu geen veelvoud van d, dan is de congruentie vals.
Is $b = nd$, dan krijgt de congruentie de gedaante

$$\begin{aligned} kd\cdot x + nd &\equiv 0 \pmod{ld} \\ kx + n &\equiv 0 \pmod{l}, \end{aligned}$$

die volgens geval 1) wordt opgelost.
Modulo l is er één wortel.
Modulo m zijn er dus d getalklassen wortel van de congruentie.

Toepassingen:

1. Los op:

$$12x + 27 \equiv 0 \pmod{21}.$$

Oplossing:

$$4x + 9 \equiv 0 \pmod 7$$
$$4^{-1} \cdot 4x + 4^{-1} \cdot 9 \equiv 0 \pmod 7$$
$$x + 2 \cdot 9 \equiv 0 \pmod 7$$
$$x + 18 \equiv 0 \pmod 7$$
$$x - 3 \equiv 0 \pmod 7$$
$$x \equiv 3 \pmod 7, \quad \text{dus}$$
$$x \equiv 3, 10, 17 \pmod{21}.$$

2. De vergelijking $ax + by + c = 0$, waarin x en y gehele getallen zijn, wordt een *onbepaalde vergelijking* genoemd. Als $ax + c$ een veelvoud van b is, is y een geheel getal. De betreffende waarden van x volgen uit:

$$ax + c \equiv 0 \pmod b.$$

Bij substitutie van de gevonden x-waarden in de vergelijking volgen de bijbehorende waarden van y. Bijvoorbeeld:

Los op:

$$5x - 8y + 3 = 0.$$

Oplossing:

$$5x + 3 \equiv 0 \pmod 8$$
$$x + 5 \cdot 3 \equiv 0 \pmod 8$$
$$x - 1 \equiv 0 \pmod 8$$
$$x \equiv 1 \pmod 8$$
$$x = 8n + 1.$$

Substitutie geeft:

$$5(8n + 1) - 8y + 3 = 0$$
$$8y = 40n + 8$$
$$y = 5n + 1.$$

De oplossing is dus:

$$x = 8n + 1$$
$$y = 5n + 1.$$

DE CONGRUENTIE VAN EULER-FERMAT

§189. We beschouwen een gereduceerd restsysteem modulo m

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_{\varphi(m)} \qquad (1)$$

Het aantal hierin voorkomende getallen is $\varphi(m)$ (zie §185). Worden al deze getallen vermenigvuldigd met een natuurlijk getal a, dat onderling ondeelbaar is met m, dan ontstaat er weer een gereduceerd restsysteem modulo m

$$ag_1, ag_2, ag_3, \ldots, ag_{\varphi(m)} \tag{2}$$

Immers:

1. Geen der voorkomende getalklassen is onderling deelbaar met m, daar zowel a, als g_n onderling ondeelbaar is met m (eig. Db_{21}).
2. Het aantal voorkomende getallen is $\varphi(m)$.
3. Geen twee der voorkomende getalklassen zijn congruent. Was namelijk $ag_j \equiv ag_i \pmod{m}$, dan zou $g_j \equiv g_i$ zijn, (eig. C_3), hetgeen in strijd is met het gegeven.

Elk der in het restsysteem (1) voorkomende getallen is dus congruent met één en niet meer dan één van de getallen uit restsysteem (2).

Wegens eig. C_7 zijn de produkten van de linkerleden van twee congruenties congruent met de produkten van de rechterleden. Door herhaalde toepassing van deze eigenschap blijkt, dat de produkten van de linkerleden van een aantal congruenties (mod m) congruent zijn met de produkten van de rechterleden.

Wanneer

$$\begin{array}{ll} g_j \equiv ag_i & \pmod{m} \\ g_h \equiv ag_e & \pmod{m} \\ g_f \equiv ag_k & \pmod{m} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \times$$

dan is derhalve

$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \ldots g_{\varphi(m)} \equiv ag_1 \cdot ag_2 \cdot ag_3 \ldots ag_{\varphi(m)} \pmod{m}$$
$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \ldots g_{\varphi(m)} \equiv a^{\varphi(m)} \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \ldots g_{\varphi(m)} \pmod{m}$$
$$1 \equiv a^{\varphi(m)} \pmod{m} \quad \text{(eig } C_3\text{)},$$

dus is

Eig. C_9. $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, als a en m onderling ondeelbaar zijn.

Dit is de *stelling van Euler*.

Wordt hierin voor m een priemgetal p genomen, zodat

$\varphi(p) = p - 1$, terwijl $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ is, dan gaat de stelling van Euler over in de *stelling van Fermat*:

Eig. C10. $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, **als** $a \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Toepassing:

Bepaal de rest van 23^{424} bij deling door 17. Bepaling: Uit $23 \equiv 6 \pmod{17}$ volgt $23^{424} \equiv 6^{424} \pmod{17}$. (eigenschap afgeleid uit C_7).

De opgave wordt dus de rest te bepalen van 6^{424} bij deling door 17.

Volgens de stelling van Fermat geldt

$$
\begin{aligned}
6^{16} &\equiv 1 \pmod{17}, \quad \text{dus} \\
6^{424} &\equiv 6^{418} \cdot 6^8 \equiv \\
&\equiv 6^{16.26} \cdot 6^8 \equiv \\
&\equiv (6^{16})^{24} \cdot 6^8 \equiv \\
&\equiv 1^{26} \cdot 6^8 \equiv \\
&\equiv 6^8 \qquad\qquad \pmod{17} \\
6^2 &\equiv 2 \pmod{17} \\
6^4 &\equiv 4 \pmod{17} \\
6^8 &\equiv 16 \pmod{17}
\end{aligned}
$$

dus

$$6^{424} \equiv 6^8 \equiv 16 \pmod{17}$$

Bij deling door 17 laat 23^{424} dus 16 tot rest over.

PRIMITIEVE WORTELS MODULO m

§190. Uit de stelling van Fermat blijkt

$$a^6 \equiv 1 \pmod{7}, \quad \text{als} \quad a \not\equiv 0 \pmod{7}.$$

We gaan nu voor alle getalklassen van a na tot welke macht deze dienen te worden verheven om congruent één te zijn, modulo 7.

$$
\begin{aligned}
&1 \to 1^1 \equiv 1 \qquad\qquad \pmod{7} \\
&2 \to 2^1 \equiv 2;\ 2^2 \equiv 4;\ 2^3 \equiv 1. \\
&3 \to 3^1 \equiv 3;\ 3^2 \equiv 2;\ 3^3 \equiv 6;\ 3^4 \equiv 4;\ 3^5 \equiv 5;\ 3^6 \equiv 1. \\
&4 \to 4^1 \equiv 4;\ 4^2 \equiv 2;\ 4^3 \equiv 1. \\
&5 \to 5^1 \equiv 5;\ 5^2 \equiv 4;\ 5^3 \equiv 6;\ 5^4 \equiv 2;\ 5^5 \equiv 3;\ 5^6 \equiv 1. \\
&6 \to 6^1 \equiv 6;\ 6^2 \equiv 1.
\end{aligned}
$$

Aan de congruentie $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ is, voorzover $x \not\equiv 0 \pmod{p}$, voor elke waarde van x voldaan.

Die waarden van x, die *minstens*, dus juist, tot de macht $p-1$ moeten worden verheven om een macht te krijgen die congruent 1 modulo p is, noemt men *primitieve wortels van p*.

Uit bovenstaand overzicht blijkt, dat 3 en 5 primitieve wortels modulo 7 zijn.

Primitieve wortels modulo m (m is een deelbaar getal) zijn de getallen (getalklassen), die *minstens* tot de macht $\varphi(m)$ moeten worden verheven om een macht te krijgen die congruent 1 modulo m is.

Het zijn dus wortels, die voldoen aan de congruentie van Euler

$$x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

waarin x en m onderling ondeelbaar, terwijl $x^k \not\equiv 1 \pmod{m}$, waarbij $0 < k < \varphi(m)$.

PRIMITIEVE WORTELS VAN DE CONGRUENTIE VAN FERMAT

§191. De congruentie $x^{36} \equiv 1 \pmod{37}$ heeft volgens de stelling van Fermat 36 wortels, namelijk de getalklassen 1, 2, 3, 4, ..., 36 (mod 37).

Zij gegeven, dat 2 een primitieve wortel van 37 is. $2^{36} \equiv 1 \pmod{37}$; 36 is de kleinste exponent bij een macht van 2, zodat deze modulo 37 congruent 1 is.

Het is duidelijk, dat $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots, 2^{36}$ aan de congruentie van Fermat $x^{36} \equiv 1 \pmod{37}$ voldoen.

$$(2^2)^{36} \equiv (2^{36})^2 \equiv 1 \pmod{37};$$
$$(2^3)^{36} \equiv (2^{36})^2 \equiv 1 \pmod{37}.$$

Geen der bovenvermelde machten van 2 behoren tot dezelfde getalklasse;

immers, is $2^k \equiv 2^l \pmod{37}$ $\quad (1 < k < 37)$,
dan geldt $2^{k-l} \equiv 1 \pmod{37}$, waarbij $k - l < 37$,
hetgeen in strijd is met het gegeven, dat 2 een primitieve wortel is.

De getallen $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^{36}$ zijn dus de 36 wortels van de congruentie van Fermat.

We stellen ons nu de vraag, welke van deze wortels primitieve wortels zijn.

Alle machten van 2, waarvan de exponenten onderling deelbaar zijn met 36, zijn *geen* primitieve wortels.

$(2^2)^{18}$	$\equiv 2^{36}$	$\equiv 1 \pmod{37}$	$(2^{20})^9$	$\equiv (2^{36})^5$	$\equiv 1$
$(2^3)^{12}$	$\equiv 2^{36}$	$\equiv 1$	$(2^{21})^{12}$	$\equiv (2^{36})^7$	$\equiv 1$
$(2^4)^9$	$\equiv 2^{36}$	$\equiv 1$	$(2^{22})^{18}$	$\equiv (2^{36})^{11}$	$\equiv 1$
$(2^6)^6$	$\equiv 2^{36}$	$\equiv 1$	$(2^{24})^3$	$\equiv (2^{36})^2$	$\equiv 1$
$(2^8)^9$	$\equiv (2^{36})^2$	$\equiv 1$	$(2^{26})^{18}$	$\equiv (2^{36})^{13}$	$\equiv 1$
$(2^9)^4$	$\equiv 2^{36}$	$\equiv 1$	$(2^{27})^4$	$\equiv (2^{36})^3$	$\equiv 1$
$(2^{10})^{18}$	$\equiv (2^{36})^5$	$\equiv 1$	$(2^{28})^9$	$\equiv (2^{36})^7$	$\equiv 1$
$(2^{12})^3$	$\equiv 2^{36}$	$\equiv 1$	$(2^{30})^6$	$\equiv (2^{36})^5$	$\equiv 1$
$(2^{15})^{12}$	$\equiv (2^{36})^5$	$\equiv 1$	$(2^{33})^{12}$	$\equiv (2^{36})^{11}$	$\equiv 1$
$(2^{16})^9$	$\equiv (2^{36})^4$	$\equiv 1$	$(2^{34})^{18}$	$\equiv (2^{36})^{17}$	$\equiv 1$
$(2^{18})^2$	$\equiv 2^{36}$	$\equiv 1$	$(2^{36})^1$	$\equiv 2^{36}$	$\equiv 1$

De primitieve wortels moeten dus gezocht worden onder de machten van 2 waarvan de exponenten kleiner zijn dan en onderling ondeelbaar zijn met 36.

We gaan nu na of 2^5 een primitieve wortel is.

$(2^5)^n \equiv 1 \pmod{37}$. Voor $n = 36$ is uiteraard aan de congruentie voldaan. Zou de congruentie gelden voor een kleinere waarde van n, bijv. n_1, dan was $(2^5)^{n_1} \equiv 1 \pmod{37}$.

Deling van de overeenkomstige leden van de congruenties
$2^{36v} \equiv 1 \pmod{37}$
en $(2^5)n_1 \equiv 1 \pmod{37}$, waarbij $36v$ het kleinste 36-voud groter dan $5n_1$ is,
geeft $2^w \equiv 1 \pmod{37}$, waarbij $0 < w < 36$ is,
hetgeen in strijd is met het gegeven, dat 2 een primitieve wortel van 37 is.

Hieruit volgt, dat 2^5 een primitieve wortel is. Evenzo 2^7, 2^{11}, 2^{13}, 2^{17}, 2^{19}, 2^{23}, 2^{25}, 2^{29}, 2^{31} en 2^{35}. Er zijn dus $\varphi(36)$ primitieve wortels. De primitieve wortels modulo 37 zijn:

$2 \equiv 2$	$2^{19} \equiv 35$
$2^5 \equiv 32$	$2^{23} \equiv 5$
$2^7 \equiv 17$	$2^{25} \equiv 20$
$2^{11} \equiv 13$	$2^{29} \equiv 24$
$2^{13} \equiv 15$	$2^{31} \equiv 22$
$2^{17} \equiv 18$	$2^{35} \equiv 19$

Algemeen geldt, dat *als* de congruentie van Fermat primitieve wortels heeft, er $\varphi(p-1)$ primitieve wortels bestaan.

PERIODE VAN EEN GETAL a MODULO m

§192. Onder de periode van een getal a modulo m, verstaat men het kleinste natuurlijke getal d, zo dat geldt

$a^d \equiv 1 \pmod{m}$.

Bijvoorbeeld

2 is de periode van 3 modulo 8, want

$3^1 \equiv 3$; $3^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

We zullen aantonen, dat de periode van de wortels van de congruentie van Fermat een deler is van $p - 1$, met andere woorden:

Eig. C11. Als $a^d \equiv 1 \pmod{p}$ is, $(d < p)$, $(a \not\equiv 0, \bmod p)$, dan is d een deler van $p - 1$.

Bewijs: $a^d \equiv 1 \pmod{p}$.

Voorts geldt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Hieruit volgt $a^{p-1-kd} \equiv 1 \pmod{p}$ (zie §186, toepassing eig C8) k is hierin een zodanig natuurlijk getal, dat $0 < p - 1 - kd \leqslant d$ is. Gegeven is, dat d de periode van a modulo p is, zodat $p - 1 - kd$ niet kleiner dan d kan zijn.

Dan is $p - 1 - kd = d$

$p - 1 = (k + 1) \cdot d$

d is een deler van $p - 1$.

Een voorbeeld van deze eigenschap merkten we op in §191, waar bleek dat de periode van de wortels van $x^{36} \equiv 1 \pmod{37}$ respectievelijk 36, 18, 12, 9, 4, 3, 2 en 1 was.

AANTAL PRIMITIEVE WORTELS

§193. Is a een primitieve wortel van $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ $(a \not\equiv 0, \bmod p)$ en a^q een wortel met periode d, zodat geldt $(a^q)^d \equiv 1 \pmod{p}$, dan zal, als $d = kd_1$ is, a^q geen wortel zijn van de congruentie

$x^{d_1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Bijvoorbeeld 2^3 is een wortel met de periode 12 (mod 37), dus geldt $(2^3)^{12} \equiv 1$, $(2^3)^6 \not\equiv 1$, $(2^3)^4 \not\equiv 1$, $(2^3)^4 \not\equiv 1$, $(2^3)^2 \not\equiv 1$, $2^3 \not\equiv 1$ (mod 37).

Is in dit geval $(2^3)^q$ een macht van 2^3 waarvan de exponent q niet relatief priem met 12 is ($q < 12$), dan zal $(2^3)^q$ een periode hebben, die gelijk is aan het quotiënt van 12 en de G.G.D. van q en 12. De periode is dan kleiner dan 12.

De wortels met de periode 12 kunnen dus slechts voorkomen onder die machten van 2^3 waarvan de exponent onderling ondeelbaar is met 12. Hun aantal is $\varphi(12)$. De betreffende wortels zijn twee aan twee onderling niet congruent ($(2^3)^{q_1} \not\equiv (2^3)^{q_2}$, (mod 37), als $q_1 \neq q_2$, terwijl $q_1 < 12$ en $q_2 < 12$).

In het algemeen: De congruentie $x^d \equiv 1$ (mod p), (d is een deler van p), heeft géén of $\varphi(d)$ wortels met de periode d. Zijn $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots, p-1$ delers van $p - 1$, dan kunnen er, modulo p, maximaal

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \varphi(d_3) + \varphi(d_4) + \ldots + \varphi(p - 1)$$

wortels met een bepaalde periode zijn. Volgens eigenschap $\mathbf{I_3}$ is dit aantal $p - 1$ (stelling van Gauss).

Alle wortels van de congruentie $x^{p-1} \equiv 1$ (mod p) hebben een periode. Het aantal wortels is $p - 1$.

Hieruit volgt, dat de congruentie $x^d \equiv 1$ (mod p) juist $\varphi(d)$ wortels met de periode d heeft.

De congruentie $x^{p-1} \equiv 1$ (mod p) heeft dus $\varphi(p - 1)$ wortels met de periode $p - 1$.

Er zijn dus $\varphi(p - 1)$ primitieve wortels.

Eig. C_{12}. De congruentie $x^d \equiv 1$ (mod p), waarin d een deler van $p - 1$ is, heeft $\varphi(d)$ wortels met de periode d.

Eig. C_{13}. De congruentie van Fermat: $x^{p-1} \equiv 1$ (mod p) heeft $\varphi(p-1)$ primitieve wortels.

TOEPASSING OP REPETERENDE BREUKEN

§194. Wordt de onvereenvoudigbare breuk $\frac{t}{n}$, waarin n en 10 onderling ondeelbaar zijn, herleid tot een decimaal getal, dan zal een zuiver repeterende breuk ontstaan.

In §166 zagen we, dat de periode hiervan hoogstens $n - 1$ is. Thans kunnen we nader op het bepalen van de periode ingaan.

$$
\begin{array}{l}
n/t,000\ldots\backslash 0,pq\ldots \\
\quad \vdots\vdots\vdots \\
\ \underline{pn}\,\vdots\vdots \\
\qquad r_1 0\,\vdots \\
\qquad\quad \vdots \\
\qquad \underline{qn}\,\vdots \\
\qquad\quad r_2 0 \\
\\
\qquad\quad \underline{\ldots} \\
\qquad\quad\ r_3
\end{array}
$$

De rij cijfers achter de komma in het quotiënt zal repeteren als r_k gelijk is aan t. De periode van de repeterende breuk is gelijk aan de kleinste waarde van k, zo dat $r_k = t$.

r_k is de rest bij deling van $t \cdot 10^k$ door n. De kleinste waarde van k waarvoor $t \cdot 10^k \equiv t \pmod{n}$ is, is dus de gezochte periode.

Daar t en n onderling ondeelbaar zijn, gaat de congruentie over in $10^k \equiv 1 \pmod{n}$. De kleinste waarde van k waarvoor aan deze congruentie voldaan is, is de periode van 10 modulo n.

Eig. B_{12}. De periode van een zuiver repeterende breuk, ontstaan uit een onvereenvoudigbare breuk waarvan de noemer onderling ondeelbaar is met 10, is de periode van 10 modulo n, waarin n de noemer voorstelt.

Toepassingen:

1. Bepaal de periode van $\frac{3}{17}$ na herleiding tot een repeterende breuk.
 Bepaling: Dit is dus de periode van 10 modulo 17; deze periode kan zijn (eig. C_{11}) 16, 8, 4, 2 of 1.

 $$
 \begin{aligned}
 10^1 &\equiv 10 \pmod{17} \\
 10^2 &\equiv 15 \\
 10^4 &\equiv 4 \\
 10^8 &\equiv 16 \\
 10^{16} &\equiv 1 \pmod{17}
 \end{aligned}
 $$

 De periode van de (zuiver) repeterende breuk is dus 16.

2. Bepaal de periode van $\frac{4}{13}$ na ontwikkeling in een repeterende breuk.

Bepaling: $10^1 \equiv 10 \pmod{13}$
$10^2 \equiv 9$
$10^3 \equiv 12$
$10^6 \equiv 1 \pmod{13}$

De periode is 6.

INDICES

§195a. 2 is een primitieve wortel modulo 11.

$2^1 \equiv 1$ $\quad 2^6 \equiv 9$
$2^2 \equiv 4$ $\quad 2^7 \equiv 7$
$2^3 \equiv 8$ $\quad 2^8 \equiv 3$
$2^4 \equiv 5$ $\quad 2^9 \equiv 6$
$2^5 \equiv 10$ $\quad 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

De opvolgende machten van 2 vormen een volledig restsysteem modulo 10.

Bij elke macht van 2 (de exponent is hierbij kleiner dan 11) behoort één en slechts één hiermee congruente getalklasse modulo 10.

wortel 2.

exp.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
getal	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

Omgekeerd behoort bij elke getalklasse (mod 10) dus één hiermee congruente macht van 2 waarvan de exponent kleiner is dan 11.

Is, in het algemeen, a een primitieve wortel modulo p, dan vormen de opvolgende machten van a op overeenkomstige wijze een volledig restsysteem modulo $p - 1$. Er is dus slechts één exponent kleiner dan p die een macht van a congruent doet zijn met één bepaalde getalklasse modulo $p - 1$ en omgekeerd.

Definitie: Als $a^e \equiv g \pmod{p}$, dan noemen we e de index van g voor de primitieve wortel a (mod p).
In formule: $e = {}^a\text{ind}\, g$.

Uit het bovenstaande blijkt, dat bij een primitieve wortel a zo'n index bestaat, als $g \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Bijvoorbeeld:

$^2\text{ind}\ 5 \equiv 4 \pmod{11}$, want $2^4 \equiv 5 \pmod{11}$;
$^2\text{ind}\ 6 \equiv 9 \pmod{11}$, want $2^9 \equiv 6 \pmod{11}$.

De overeenkomst van de betekenis van de indices bij de congruenties en de betekenis van de logaritmen (zie §61) zal nader aan de orde komen.

Om van de indices gebruik te kunnen maken, moet men modulo p een index-tafel en omgekeerde tafel opstellen voor een primitieve wortel a. Bijvoorbeeld

mod. 11; primitieve wortel 2.

getal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
index	10	1	8	2	4	9	7	3	6	5

Het aan het begin van de paragraaf gegeven schema wordt als anti-indextafel beschouwd, dat wil zeggen: bij een gegeven index volgt hieruit de bijbehorende getalklasse.

§195b. Stel de getallen g_1 en g_2 onderling congruent (mod p). $g_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$; $g_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Beide zijn dan te beschouwen als machten van een primitieve wortel a (mod p):

$g_1 \equiv a^k \pmod{p}\ k < p \qquad g_2 \equiv a^l \pmod{p}\ l < p$

Dan geldt dus:

$a^k \equiv a^l \pmod{p}$, zodat, als we $k > l$ veronderstellen,
$a^{k-l} \equiv l \pmod{p}$.

Volgens eig. C_{10} is $k - l$ een deler van $p - 1$

$k - l \equiv 0 \pmod{p-1}$
$k \equiv l \pmod{p-1}$
$^a\text{ind}\ g_1 \equiv {}^a\text{ind}\ g_2 \pmod{p-1}$

Eig. C_{14}. Zijn twee getallen modulo een priemgetal p congruent en niet deelbaar door p, dan zijn hun indices congruent modulo $p - 1$, en omgekeerd.

Eig. C_{15}. De index van een produkt is modulo $p - 1$ congruent met de som van de indices der factoren.
In formule: $^a\text{ind}\ g_1 g_2 \equiv {}^a\text{ind}\ g_1 + {}^a\text{ind}\ g_2$.

Bewijs:

Zij $g_1 \equiv a^k \pmod{p}$ en $g_2 \equiv a^l \pmod{p}$, dan is $g_1 g_2 \equiv a^{k+l}$ (mod p), dus $^a\text{ind}\ g_1 g_2 \equiv k + l \pmod{p-1}$

$$\left.\begin{array}{l} {}^a\text{ind}\, g_1 \equiv k \\ {}^a\text{ind}\, g_2 \equiv l \end{array}\right\} \rightarrow {}^a\text{ind}\, g_1 + {}^a\text{ind}\, g_2 \equiv k + l \pmod{p-1},$$

waaruit het te bewijzen volgt.

Zonder bewijs volgen nu nog enige andere eigenschappen betreffende indices, die een nauwe overeenkomst hebben met eigenschappen betreffende logaritmen.

Eig. C_{16}. ${}^a\text{ind}\, 1 \equiv 0 \pmod{p-1}$.

Eig. C_{17}. Als $g_1 g_2 \equiv 1 \pmod p$, dan is ${}^a\text{ind}\, g_1 + {}^a\text{ind}\, g_2 \equiv \equiv 0; \pmod{p-1}$.

Eig. C_{18}. ${}^a\text{ind}\, g^n \equiv n \cdot {}^a\text{ind}\, g; \pmod{p-1}$.

Eig. C_{19}. ${}^a\text{ind}\, b \cdot {}^b\text{ind}\, a \equiv 1; \pmod{p-1}$.

Toepassingen:

1. Los op $10x^3 \equiv 5 \pmod{11}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^2\text{ind}\, 10 + 3 \cdot {}^2\text{ind}\, x &\equiv {}^2\text{ind}\, 5 \pmod{10} \\ 5 + 3 \cdot {}^2\text{ind}\, x &\equiv 4 \pmod{10} \\ 3 \cdot {}^2\text{ind}\, x &\equiv 9 \pmod{10} \\ {}^2\text{ind}\, x &\equiv 3 \pmod{10} \\ x &\equiv 8 \pmod{11}. \end{aligned}$$

2. Met de indices leiden we de *stelling van Wilson* af:

Eig. C_{20}. $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$; p is een priemgetal.

Bewijs:

$$\text{ind}(p-1)! \equiv \text{ind}\,\{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (p-1)\} \pmod{p-1}.$$

De rij van de indices van een volledig restsysteem modulo $p-1$ vormt, zoals aangetoond, in willekeurige volgorde, weer een volledig restsysteem modulo $p-1$; dus

$$\begin{aligned} \text{ind}\,(p-1)! &\equiv 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (p-2) \pmod{p-1} \\ &\equiv \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2) \ldots \text{(I) (zie §156)} \end{aligned}$$

${}^a\text{ind}(-1) \equiv \frac{1}{2}(p-1)$; want $a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1 \pmod p$, daar $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ en $a^{\frac{1}{2}(p-1)} \not\equiv 1$ (zie §§ 196, 207 en 210).

(I) gaat dus over in:

$$\begin{aligned} \text{ind}(p-1)! &\equiv (p-2) \cdot \text{ind}\,(-1) \pmod{p-1} \\ \text{ind}(p-1)! &\equiv \text{ind}(-1)^{p-2} \pmod{p-1} \end{aligned}$$

$$(p-1)! \equiv (-1)^{p-2} \pmod p$$
$$(p-1)! \equiv (-1)^{p-1} \cdot (-1) \pmod p \quad \text{(zie § 207)}$$
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$
$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Ook het omgekeerde van de stelling van Wilson geldt: Als $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$, dan is p een priemgetal.

De echte delers van p zijn namelijk kleiner dan p en groter dan 1. Had p een echte deler, dan was dit een deler van $(p-1)!$ en volgens het gegeven ook van $(p-1)! + 1$. Dit leidt tot een strijdigheid.

Het omgekeerde van de stelling van Wilson is dus een (zij het onpraktisch) kenmerk om na te gaan of een getal een priemgetal is.

KWADRAATRESTEN

§196. Is de congruentie $x^2 \equiv a \pmod p$ ($a \not\equiv 0$, mod p) oplosbaar, dan heet *a een kwadraatrest van p*, ook wel *rest* van p genoemd.

Is de congruentie niet oplosbaar, dan is a een *niet-rest* van p.

$x^2 \equiv a$ zal oplosbaar zijn, als $a \equiv k^2 \pmod p$, waarin k geen veelvoud van p voorstelt. Dit zal het geval zijn als a congruent is met een van de getalklassen

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, (p-1)^2$.

We gaan na of één of meer van deze getalklassen onderling congruent zijn.

Als $k^2 \equiv l^2 \pmod p$ is, $(l \leqslant k < p)$,
dan is $k^2 - l^2 \equiv 0 \pmod p$
$(k+l) \cdot (k-l) \equiv 0 \pmod p$,
dus òf $k - l \equiv 0 \pmod p \rightarrow k \equiv l \pmod p$, dus $k = l$,
òf $k + l \equiv 0 \pmod p \rightarrow k + l = p$.

De kwadraatresten modulo p komen dus in een gereduceerd restsysteem modulo p in paren van twee voor

$1^2 \equiv (p-1)^2$;
$2^2 \equiv (p-2)^2$, enz.

Daarom zijn er modulo p, $\frac{1}{2}(p-1)$ getalklassen die een getal bevatten dat een kwadraat is. De overige getalklassen bevatten niet zo'n getal en representeren dus de niet-resten. De getalklasse 0 is rest noch niet-rest.

Als $a \equiv k^2 \pmod{p}$,

dan is $a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv k^{p-1} \pmod{p}$

$a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$.

De kwadraatresten zijn dus wortels van $x^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$.

$x^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ leidt tot

$(x^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1)(x^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1) \equiv 0$.

De kwadraatresten zijn wortels van $x^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Wortels van $x^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1 \equiv 0$ zijn geen kwadraatresten; was namelijk $x \equiv k^2$, dan zou $(k^2)^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ zijn; dus

$k^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Daar $k^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ is, leidt dit tot een ongerijmdheid.

De congruentie $x^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ heeft $\frac{1}{2}(p - 1)$ wortels en er zijn $\frac{1}{2}(p - 1)$ kwadraatresten, waaruit volgt dat de kwadraatresten juist de wortels van deze congruentie zijn.

In de afleiding van deze eigenschap is aangenomen, dat voor de modulo p sprake is van een priemgetal groter dan twee. De eigenschap geldt derhalve voor oneven priemgetallen. Modulo 2 is 1 een rest.

Eig. C21. Het getal a is een kwadraatrest modulo p, als $a^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ is, en een niet-rest als $a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ is.

Deze eigenschap heet het *kenmerk van Euler*.

Als a een rest van p is, wordt dit symbolisch aangegeven door het *symbool van Legendre*

$\left(\frac{a}{p}\right) = 1$; spreek uit '$a$ in p is 1'.

Is a een niet-rest, dan wordt dit weergegeven door

$\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.

Voorbeelden:

1. $\left(\frac{4}{17}\right) = 1$, want 4 is een kwadraatrest modulo 17.

2. $\left(\frac{8}{17}\right) = 1$, want als $x^2 \equiv 8 \pmod{17}$ is, volgt hieruit $x \equiv 5$ of $x \equiv 12 \pmod{17}$.

Behalve uit de definitie van kwadraatrest blijkt de juistheid van bovenstaande voorbeelden door toepassing van het kenmerk van Euler:

1. $\left(\frac{4}{17}\right) \to 4^8 \equiv 16^4 \equiv 1 \pmod{17}$.

2. $\left(\frac{8}{17}\right) \to 8^8 \equiv 64^4 \equiv 13^4 \equiv 1 \pmod{17}$.

§197. Als twee getallen beide een kwadraatrest (mod p) zijn, dan is hun produkt ook een rest.

Is namelijk $g_1^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1$ en $g_2^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$, dan is $(g_1 g_2)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$.

Op overeenkomstige wijze volgt:

Als twee getallen niet-rest zijn, is hun produkt een rest. Als van twee getallen één een rest is en het andere een niet-rest, is het produkt een niet-rest.

Symbolisch samengevat:

Eig. C22. $\left(\frac{g_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{g_2}{p}\right) = \left(\frac{g_1 g_2}{p}\right)$.

§198. Zonder bewijs volgt hier nog de *reciprociteitsstelling van Legendre*, die geldt voor oneven priemgetallen p en q, en die dient om het kwadratisch karakter bij grotere getallen te onderzoeken:

Eig. C23. $\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1) \cdot \frac{1}{2}(q-1)}$.

Toepassingen:

1. $\left(\frac{5}{7}\right) \cdot \left(\frac{7}{5}\right) = 1;\ \left(\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1,$

 dus $\left(\frac{5}{7}\right) = -1$.

2. $\left(\frac{20}{73}\right) = \left(\frac{4}{73}\right) \cdot \left(\frac{5}{73}\right) = \left(\frac{73}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) =$

 $\left(\frac{2}{3}\right) = -1$.

XI. NEGATIEVE GETALLEN

INLEIDING

§199. Met de tot dusver ingevoerde getallen zijn niet alle bewerkingen onbeperkt uitvoerbaar. Aan $3 - 7$ kunnen we geen betekenis toekennen, daar het verschil $a - b$ is gedefinieerd voor die getallen a en b waarvoor geldt $a \geqslant b$. $3 - 7$ is niet gedefinieerd.

Om de aftrekking onbeperkt uitvoerbaar te maken, d.w.z. om $a - b$ betekenis te geven als $a < b$, voeren we een nieuwe getalsoort in.

Bij de invoering van deze getalsoort streven we (evenals dit is gebeurd bij de invoering van 0 en de breuken) ernaar, dat het nieuwe getalsysteem zodanig is, dat de reeds bekende getallen deel uitmaken van het nieuwe stelsel. Bovendien, dat de begrippen als som, produkt ongewijzigd voor de nieuwe getallen gelden en de grondeigenschappen ook op alle getallen van het nieuwe stelsel van toepassing zijn (voor de afgeleide eigenschappen is dit dan vanzelf het geval).

§200. De eigenschappen die moeten blijven gelden voor de getallen, welke na de uitbreiding zijn ontstaan, zijn:*

1. De optelling van twee getallen is mogelijk en de som is ondubbelzinnig bepaald.
2. De moduluseigenschap van de optelling: $a + 0 = a$.
3. De commutatieve eigenschap van de optelling: $a + b = b + a$.
4. De associatieve eigenschap van de optelling: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
5. De vermenigvuldiging van twee getallen is mogelijk en het produkt is ondubbelzinnig bepaald.
6. De moduluseigenschap van de vermenigvuldiging: $a \times 1 = a$.
7. De commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging: $a \times b = b \times a$.

* De hier opgesomde eigenschappen gelden voor alle getallen die in dit boek worden ingevoerd, de zgn. reële getallen.

8. De associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
9. De distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling: $p \times (a + b) = p \times a + p \times b$.
10. Voor twee getallen geldt één en niet meer dan één van de betrekkingen:
 $a < b$
 $a = b$
 $a > b$.
11. De transitieve eigenschap van groter en kleiner: als $a < b$ en $b < c$, geldt $a < c$.

GETALLENPAREN

§201. Noem het stelsel van alle natuurlijke getallen en het getal nul S. We stellen de getallen van S voor door a,b,c,d enz.

We vormen nu een stelsel van getallen (noem dit stelsel T) waarin elk getal wordt voorgesteld door een getallenpaar (a,b), waarbij de volgorde van belang is. De getallen a en b van dit getallenpaar (a,b) zijn getallen van S.

Per definitie voldoen de getallen van T aan de volgende voorwaarden:

I. (a,b) is dan en dan alleen gelijk aan (c,d) als $a + d = c + b$.
II. $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$.
III. $(a,b) \times (c,d) = (ac + bd, ad + cb)$.
IV. Dan en dan alleen geldt $(a,b) > (c,d)$ als $a + d > c + b$.
V. Het getal a van S is gelijk aan $(a,0)$.

§202. Uit V volgt dat de getallen van S in T zijn opgenomen. Verder is na te gaan, dat de eigenschappen van de getallen van S in het nieuwe systeem voldoen aan de voorwaarden van §200 (we zullen dit later voor alle getallen van T bewijzen).

Bijvoorbeeld:

$a + c = (a,0) + (c,0) = (a + c,0) = a + c$;

$a \times c = (a,0) \times (c,0) = (a \times c,0) = a \times c$;

$a > c$ als $(a,0) > (c,0)$, dus als $a + 0 > c + 0$, d.w.z. als $a > c$.

§203. Uit de definities van §201 volgen onmiddellijk enige eigenschappen van §200, bijv. eigenschap 1.

Hieronder zullen we aantonen, dat de eigenschappen 2., 3., 4., 6. en 7. gelden; de andere laten we aan de lezer over.

2. Moduluseigenschap van de optelling:

$$(a,b) + 0 = (a,b) + (0,0) = (a + 0, b + 0) = (a,b).$$

3. Commutatieve eigenschap van de optelling:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) =$$
$$= (c,d) + (a,b).$$

4. Associatieve eigenschap van de optelling:

$$\{(a,b) + (c,d)\} + (e,f) = (a + c, b + d) + (e,f) =$$
$$= \{(a + c) + e, (b + d) + f\} =$$
$$= \{a + (c + e), b + (d + f)\} =$$
$$= (a,b) + (c + e, d + f) = (a,b) + \{(c,d) + (e,f)\}.$$

6. Moduluseigenschap van de vermenigvuldiging:

$$(a,b) \times 1 = (a,b) \times (1,0) =$$
$$= (a \times 1 + b \times 0, a \times 0 + 1 \times b) =$$
$$= (a + 0, 0 + b) = (a,b).$$

7. Commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging:

$$(a,b) \times (c,d) = (ac + bd, ad + cb) =$$
$$= (ca + db, cb + ad) = (c,d) \times (a,b).$$

§204. Uit §201 I volgt:

$(a,b) = (a + c, b + c)$, immers $a + (b + c) = (a + c) + b$.

Van rechts naar links gelezen betekent dit:

$(e,f) = (e - h, f - h)$.

Een getallenpaar wordt door een daaraan gelijk getallenpaar vervangen, als men beide getallen van het paar met een zelfde getal vermeerdert of met een zelfde getal vermindert.

Zo is dus:

$7 = (7,0) = (8,1) = (13,6)$;

$0 = (0,0) = (4,4) = (a,a)$.

§205. Uit §204 volgt:

als $a \geqslant b \quad (a,b) = (a - b, 0) = a - b$.

Het getal (a,b) is voor $a \geqslant b$ gelijk aan het verschil $a - b$.

Alle natuurlijke getallen en het getal 0 kunnen worden voorgesteld door (a,b), waarbij $a \geqslant b$.

$3 = (7,4) = (8,5) = (a + 3, a)$.

Is $a < b$, dan stelt het getallenpaar (a,b) geen natuurlijk getal

en niet het getal 0 voor. We noemen het getal, voorgesteld door (a,b), als $a < b$, een *negatief, geheel getal*.

Als $a < b$, geldt: $(a,b) = (a - a, b - a) = (0, b - a) = (0, c)$, waarbij, omdat $a < b$, c een natuurlijk getal is. Hieruit blijkt: elk negatief geheel getal is te schrijven als een getallenpaar waarvan het eerste getal 0 en het tweede getal een natuurlijk getal is.

$(0,c) < (a,a)$, want (zie §201 IV) $0 + a < a + c$
d.w.z. $(0,c) < 0$.

Elk negatief geheel getal is kleiner dan 0.

§206. De groep gehele getallen is nu uitgebreid met de negatieve gehele getallen. In tegenstelling tot wat we vóór de invoering van de negatieve getallen onder gehele getallen hebben verstaan (0 en de natuurlijke getallen, die men samen wel *aantallen* noemt), bedoelen we voortaan met gehele getallen de groep getallen bestaande uit: de negatieve gehele getallen, het getal nul en de natuurlijke getallen. De natuurlijke getallen heten in dit verband ook wel de *positieve* gehele getallen.

Het negatieve gehele getal $(0,a)$ wordt meestal geschreven als $-a$.

$a = (a,0)$
$(0,a) = -a = -(a,0)$.

Elk geheel getal is te schrijven als getallenpaar, en elk getallenpaar stelt een geheel getal voor.

Volgens §201 II is $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$,
dus $(a,b) + (b,a) = (a + b, b + a) = (a + b, a + b) = 0$.

We noemen twee getallen, die 0 tot som hebben, elkaars *tegengestelden*.

(b,a) is het tegengestelde van (a,b);
(a,b) is het tegengestelde van (b,a).

We geven dit als volgt aan:

$(b,a) = -(a,b)$
$(a,b) = -(b,a)$
$(a,b) = -\{-(a,b)\}$.

8 en -8 zijn elkaars tegengestelden
$-8 + 8 = 0$.
$-(-10) = 10$.
$-0 = 0$, want $-0 + 0 = 0$.

Door invoering van de negatieve getallen is de aftrekking onbeperkt uitvoerbaar:

$7 - 11 = -4.$

Als a positief is, is $-a$ negatief;
als a negatief is, is $-a$ positief.
Als a en b positief of 0 zijn, geldt:

$$a + (-b) = (a,0) + (0,b) =$$
$$= (a + 0, 0 + b) = (a,b) = a - b$$

(dit geldt voor elke gehele waarde van a en b).

'Met b verminderen' kan dus vervangen worden door 'met $-b$ vermeerderen'. Men kan dus elke vorm met + en − tekens opvatten als een som: $a + b - c + d$ is de som van de getallen $a, b, -c$ en d.

$15 - 8 = 15 + (-8) = 7;$
$10 - (-7) = 10 + 7 = 17.$

§207.

$$a \cdot (-b + b) = a \cdot 0 = 0$$
$$a \cdot (-b) + a \cdot b = 0$$

$a \cdot (-b)$ is het tegengestelde van $a \cdot b$, dus:

$$a \cdot (-b) = -ab.$$

Een produkt wordt tegengesteld door één van de factoren door zijn tegengestelde te vervangen.

Een bijzonder geval van bovenstaande is:

Als men een getal met −1 vermenigvuldigt, is het produkt het tegengestelde van dat getal:

$3 \times -7 = -21;$
$-1 \times a = -a.$

$$(-a) \cdot (-b) = -\{a \cdot (-b)\} = -(-ab) = ab,$$

dit betekent, dat als men beide factoren van een produkt tegengesteld neemt, het produkt niet verandert:

$3 \times 7 = 21 \rightarrow -3 \times -7 = 21.$

Het produkt van twee negatieve getallen is positief.

Dit volgt ook hieruit (a, b en c positief geheel):

$$-a \times -b = (0,a) \times (0,b) =$$
$$= (0 \cdot 0 + a \cdot b, 0 \cdot b + 0 \cdot a) = (ab,0) = ab.$$

Ter beklemtoning dat het produkt positief is, schrijft men bijv. $-4 \times -3 = 12$ ook wel als volgt: $-4 \times -3 = +12.$

Het produkt van een negatief getal en een positief getal is negatief, zoals blijkt uit:

$$-a \times b = (0,a) \times (b,0) =$$
$$= (0 \cdot b + a \cdot 0, 0 \cdot 0 + b \cdot a) = (0,ab) = -ab.$$

Uit beide eigenschappen volgt, dat het produkt van een oneven aantal negatieve getallen negatief is, en het produkt van een even aantal negatieve getallen positief.

$$-4 \times -3 \times -2 = -24;$$
$$(-1)^2 = 1;$$
$$(-1)^3 = -1;$$
$$(-1)^{2n} = 1;$$
$$(-1)^{2n+1} = -1.$$

§208.

$$-(a + b) = (-1) \cdot (a + b) =$$
$$= -1 \cdot a + -1 \cdot b = -a + -b;$$
$$-(a + -b) = (-1) \cdot (a + -b) =$$
$$= -1 \cdot a + -1 \cdot -b = -a + b.$$

Het tegengestelde van een som is gelijk aan de som van de tegengestelden van de termen.

Daar aftrekken te beschouwen is als optellen, zullen de eigenschappen van de aftrekking op andere wijze ook voor de dag komen, bijv.:

$$(a - b) - c = a - (b + c).$$

In woorden: een verschil wordt met een getal verminderd, door de aftrekker met dat getal vermeerderen.

Bewijs:

$$(a - b) - c = (a + -b) + -c = a + -b + -c =$$
$$= a + (-b + -c) = a + -(b + c) = a - (b + c).$$

Na invoering van de negatieve getallen behoeft bij $(a - b) - c$ echter niet te gelden $a \geqslant b$ en $c \leqslant a - b$.

§209. Stel $(a,b) < (c,d)$, dus $a + d < b + c$.

We vermenigvuldigen beide getallen met het positieve getal $(p,0)$:

$$(p,0) \cdot (a,b) = (p \cdot a + 0 \cdot b, p \cdot b + a \cdot 0) = (pa,pb)$$
$$(p,0) \cdot (c,d) = (p \cdot c + 0 \cdot d, p \cdot d + c \cdot 0) = (pc,pd)$$
$$(pa,pb) < (pc,pd), \text{ want } pa + pd < pb + pc.$$

Als we de getallen (a,b) en (c,d) beide vermenigvuldigen met het negatieve getal $(0,p)$ ontstaat:

$$(0,p) \cdot (a,b) = (0 \cdot a + p \cdot b, 0 \cdot b + p \cdot a) = (pb,pa)$$
$$(0,p) \cdot (c,d) = (0 \cdot c + p \cdot d, 0 \cdot d + p \cdot c) = (pd,pc)$$
$$(pb,pa) > (pd,pc), \text{ want } pb + pc > pa + pd.$$

Dit wil zeggen:

Als twee getallen ongelijk zijn en beide met hetzelfde getal worden vermenigvuldigd, is van de twee produkten het produkt behorende bij het grootste getal het grootst als met een positief getal wordt vermenigvuldigd, en het kleinst als met een negatief getal wordt vermenigvuldigd.
Als men beide getallen met 0 vermenigvuldigt, zijn de produkten gelijk, namelijk 0.

$4 < 7 \rightarrow -4 > -7;$
$4 > 0 \rightarrow -4 < 0;$
$4 < 7 \rightarrow 12 < 21.$

§210. De negatieve getallen stellen ons in staat vele berekeningen te vereenvoudigen.

Zo is bijv. (zie §195) $2^5 \equiv 10 \pmod{11}$; hieruit volgt $2^{10} = (2^5)^2 \equiv 10^2 \pmod{11} \equiv 100 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$.

Dit is sneller in te zien door te schrijven:
$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$,
dus $2^{10} \equiv (-1)^2 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$.

Evenzo (vgl. §194, toepassing 1):

$$\begin{aligned} 10^1 &\equiv 10 \pmod{17} \\ 10^2 &\equiv -2 \pmod{17} \\ 10^4 &\equiv 4 \pmod{17} \\ 10^8 &\equiv -1 \pmod{17} \\ 10^{16} &\equiv 1 \pmod{17}. \end{aligned}$$

DE ABSOLUTE WAARDE VAN EEN GETAL

§211.
Definitie: De absolute waarde (de volstrekte waarde of de modulus) van een getal is het getal zelf als het getal niet negatief is, en is het tegengestelde van het getal als het getal negatief is.

De absolute waarde van a stelt men voor door $|a|$ (spreek uit: 'modulus a' of 'de absolute waarde van a').

$|a| = a$ als a niet negatief is; $|a| = -a$ als a negatief is.

$|3| = 3 \quad |0| = 0 \quad |-3| = 3.$

§212.

Eig. Mo_1. De absolute waarde van een produkt is gelijk aan het produkt van de absolute waarden van de factoren.

1. Als a en b beide positief zijn:
$|a| \times |b| = a \times b = ab = |ab|.$

2. Als a positief en b negatief is:
$|a| \times |b| = a \times -b = -ab = |ab|.$

3. Als a en b beide negatief zijn:
$|a| \times |b| = -a \times -b = ab = |ab|.$

Daar een produkt 0 is, als een van de factoren 0 is, geldt eig. Mo_1 ook als een van de factoren 0 is.

§213.

Eig. Mo_2. De absolute waarde van de som van twee getallen die hetzelfde teken hebben (d.w.z. beide positief of beide negatief zijn), is gelijk aan de som van de absolute waarden van de termen.

Bewijs:

1. a en b beide positief:
$|a + b| = a + b = |a| + |b|.$

2. a en b beide negatief:
$|a + b| = -(a + b) = -a + -b = |a| + |b|.$

Eig. Mo_3. De absolute waarde van de som van twee getallen die tegengesteld teken hebben (d.w.z. het ene getal is negatief en het andere getal is positief), is gelijk aan het verschil van de absolute waarden van de termen.

Bewijs:

Stel a is positief; b is negatief.

1. $|a| > |b|$; $|a + b| = a + b = |a| + (-|b|) = |a| - |b|.$

2. $|a| < |b|$; $|a + b| = -(a + b) = -\{|a| + (-|b|) =$
$= -(|a| - |b|) = |b| - |a|.$

3. $|a| = |b|$; $a + b = 0 = |a| + (-|b|) = |a| - |b|.$

XII. RATIONALE GETALLEN

INLEIDING

§214. De getallen van het stelsel T (zie §201) zijn de gehele getallen (negatief, 0, positief).

Het is mogelijk op dezelfde wijze als in §201 e.v. het getalbegrip verder uit te breiden. De getalparen die we nu gaan invoeren, worden op iets andere wijze gedefinieerd dan in §201, hoewel in grote lijnen de procedure gelijk is aan het invoeren van de gehele getallen.

We bedoelen met stelsel T de verzameling van alle gehele (negatieve, 0 en positieve) getallen en stellen deze voor door p,q,r,s enz.

We definiëren een stelsel van getallen en noemen dit stelsel Z. Elk getal van Z is voor te stellen door het getallenpaar (p,q) (te onderscheiden van (q,p)), waarbij het tweede getal van het getallenpaar positief is.

De getallen, voorgesteld door een getallenpaar van de vorm (p,q), voldoen *per definitie* aan:

a. (p,q) is dan en dan alleen gelijk aan (r,s) als $ps = rq$.
b. $(p,q) + (r,s) = (ps + rq, qs)$.
c. $(p,q) \times (r,s) = (pr, qs)$.
d. Dan en dan alleen geldt $(p,q) > (r,s)$ als $ps > qr$.
e. Elk getal p uit T wordt voorgesteld door $(p,1)$.

Uit e. volgt dus, dat de gehele getallen (van stelsel T) in stelsel Z zijn opgenomen; T is dus een deel van Z.

Stelsel Z is het stelsel van de *meetbare* of *rationale* getallen.

§215. Uit a. volgt:

$(p,q) = (kp,kq)$, want $p \times kq = kp \times q$.

Van rechts naar links gelezen betekent dit, dat als p en q bij deling door k (een natuurlijk getal) een geheel getal als quotiënt oplevert

$$(p,q) = \left(\frac{p}{k}, \frac{q}{k}\right).$$

Een bijzonder geval hiervan krijgt men als p door q gedeeld kan worden, nl.:

$$(p,q) = \left(\frac{p}{q}, 1\right) = (s,1) \qquad \text{als } p : q = s.$$

Dit betekent, dat elk geheel getal kan worden geschreven als een getallenpaar (p,q), waarbij $p : q$ (q is een natuurlijk getal) gelijk is aan het betreffende getal. Bijvoorbeeld:

$$4 = (4,1) = (12,3);$$
$$-7 = (-7,1) = (-35,5).$$

Als p gedeeld door q geen geheel getal oplevert, is (p,q) geen geheel getal. Het getal, voorgesteld door (p,q), noemt men dan een *gebroken getal* of een *breuk*.

Als (p,q) een gebroken getal voorstelt, is dit getal ook te schrijven als $\left(\frac{p}{q}, 1\right)$.

Het gebroken getal (p,q) wordt meestal geschreven als $\frac{p}{q}$.

§216. De definitie van optellen van meetbare getallen blijkt een uitbreiding te zijn van die voor gehele getallen, zoals blijkt uit:

$$p + r = (p,1) + (r,1) =$$
$$= (p \cdot 1 + r \cdot 1, 1 \cdot 1) = (p + r, 1) = p + r.$$

Ook de definitie van vermenigvuldiging is zo'n uitbreiding:

$$p \times r = (p,1) \cdot (r,1) = (p \cdot r, 1 \cdot 1) = (pr,1) = pr.$$

Er moet nu worden nagegaan of de meetbare getallen voldoen aan de eigenschappen van §200. Dit blijkt inderdaad het geval te zijn. We tonen het hieronder aan voor de nummers 2., 3., 4., 6. en 7. van §200.

2. De moduluseigenschap van de optelling:

$$(p,q) + 0 = (p,q) + (0,1) =$$
$$= (p \cdot 1 + 0 \cdot q, q \cdot 1) = (p,q).$$

3. De commutatieve eigenschap van de optelling:

$$(p,q) + (r,s) = (ps + rq, qs) =$$
$$= (rq + ps, sq) = (r,s) + (p,q).$$

4. De associatieve eigenschap van de optelling:
$\{(p,q) + (r,s)\} + (t,u) =$
$= (ps + rq, qs) + (t,u) =$
$= (psu + rqu + tqs, qsu) =$
$= (p,q) + (ru + ts, su) =$
$= (p,q) + \{(r,s) + (t,u)\}.$

6. De moduluseigenschap van de vermenigvuldiging:
$(p,q) \times 1 = (p,q) \times (1,1) = (p \cdot 1, q \cdot 1) = (p,q).$

7. De commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging:
$(p,q) \times (r,s) = (ps + rq, qs) =$
$= (rq + ps, sq) = (r,s) + (p,q).$

§217. Evenals bij de gehele getallen gebeurt, noemen we een meetbaar getal positief als het groter dan 0 is, en negatief als het kleiner dan 0 is.

Als (p,q) positief is, geldt:
$(p,q) > (0,1)$ dus (zie §214):
$p \times 1 > 0 \times q$
$p > 0.$

Omgekeerd kunnen we bewijzen, dat $(p,q) > 0$ als $p > 0$.

We kunnen verder ook als volgt te werk gaan:
Als (p,q) negatief is, geldt:
$(p,q) < (0,1),$
dus $p \times 1 < 0 \times q$
$p < 0.$

Een meetbaar getal (voorgesteld door een getallenpaar) is positief of negatief naar gelang het eerste getal van het getallenpaar positief of negatief is.

Als het eerste getal 0 is, is het door dat getallenpaar voorgestelde meetbare getal 0.
$(0,q) = (0,1) = 0,$
want $0 \times 1 = 0 \times q.$

$(p,q) \times (r,s) = (pr, qs)$
Omdat pr positief is als p en r hetzelfde teken hebben, en negatief is als p en r verschillend teken hebben (zie §207), geldt voor meetbare getallen:
het produkt van twee positieve getallen is positief;
het produkt van twee negatieve getallen is positief;
het produkt van een positief getal en een negatief getal is negatief.

§218. Nu we de breuken als getallenparen hebben ingevoerd, zijn we in staat de eigenschappen van breuken, bijv. die in §133 en §134 per definitie zijn ingevoerd, te bewijzen.

Eig. B1. Van twee gelijknamige breuken is die met de grootste teller het grootst (de noemer is positief).

Gegeven: $\frac{p}{q}$ en $\frac{r}{q}$; $p > r$.

Te bewijzen: $\frac{p}{q} > \frac{r}{q}$.

Bewijs:

$$\frac{p}{q} = (p,q) \quad \frac{r}{q} = (r,q)$$

$(p,q) > (r,q)$, want $pq > rq$.

Eig. B2. Een breuk verandert niet van waarde als men teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

Te bewijzen: $\frac{p}{q} = \frac{kp}{kq}$.

Bewijs:

$$\frac{p}{q} = (p,q)$$

$$\frac{kp}{kq} = (kp,kq)$$

$(p,q) = (kp,kq)$ omdat $p \times kq = kp \times q$,

dus

$$\frac{p}{q} = \frac{kp}{kq}.$$

§219. Na invoering van de meetbare getallen zijn optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling onbeperkt uitvoerbaar. De worteltrekking is dit echter nog niet.

Bijvoorbeeld: Er bestaat geen geheel getal waarvan het kwadraat 3 is. Als $\frac{p}{q}$ (p ond. ond. met q) wordt gekwadrateerd, ontstaat de onvereenvoudigbare breuk $\frac{p^2}{q^2}$, die dus niet aan 3 gelijk kan zijn. Er is dus geen meetbaar getal waarvan het kwadraat

3 is, anders gezegd: de tweedemachtswortel uit 3 is (nog) niet gedefinieerd.

In verband hiermee breiden we het getalbegrip uit door invoering van het begrip *snede* (naar J. W. R. Dedekind, 1831-1916, spreekt men van de *snede van Dedekind*).

SNEDE VAN DEDEKIND

§220.

Definitie: Een snede in het gebied van de meetbare getallen is een verdeling van alle meetbare getallen in twee niet-lege klassen zó, dat elk getal van de ene klasse kleiner is dan elk getal van de andere klasse.

Uit deze definitie volgt, dat elk getal ingedeeld is; ook, dat een getal niet in beide klassen geplaatst kan worden, daar dan niet voldaan is aan de eis, dat elk getal van de ene klasse kleiner is dan elk getal van de andere klasse.

Onder een *niet-lege klasse* verstaat men een verzameling (meetbare) getallen die minstens één element bevat. Een verzameling getallen die geen getal bevat (het aantal getallen is 0), noemen we *leeg*.

De twee klassen die bij een snede ontstaan, noemen we de *lage klasse* en de *hoge klasse*. Elk getal van de lage klasse is kleiner dan elk getal van de hoge klasse.

De lage klasse duiden we (in dit boek) aan met een kleine letter (bijv. a; de getallen van die klasse noemen we dan $a_1, a_2, a_3 \ldots$); de hoge klasse met een hoofdletter, bijv. A (de getallen van deze klasse met $A_1, A_2, A_3 \ldots$).

Als symbool voor de snede gebruiken we $a|A$.

§221. Als de lage klasse van $a|A$ een grootste getal a_g bevat, behoren alle getallen groter dan a_g in klasse A; de andere getallen (de getallen kleiner dan a_g en a_g zelf) behoren in a.

Het is ook mogelijk, dat bij een snede $a|A$ de hoge klasse (A) een kleinste getal bevat (A_k). Alle getallen kleiner dan A_k behoren dan tot a; alle getallen groter dan A_k en A_k zelf, behoren tot A.

Als de lage klasse een grootste getal heeft, heeft de hoge klasse geen kleinste getal. Als de hoge klasse een kleinste getal heeft, heeft de lage klasse geen grootste getal.

Indien namelijk bij de snede $a|A$ de lage klasse het grootste getal a_g en de hoge klasse het kleinste getal A_k zouden hebben zou deze snede niet voldoen aan de definitie.

Voor het getal $\dfrac{a_g + A_k}{2}$ geldt ($a_g \neq A_k$):

$$\frac{a_g + A_k}{2} < A_k\,,$$

dus $\dfrac{a_g + A_k}{2}$ behoort tot de lage klasse.

$$a_g < \frac{a_g + A_k}{2}\,,$$

dus $\dfrac{a_g + A_k}{2}$ behoort tot de hoge klasse.

We hadden ook zó kunnen redeneren:

$$a_g < \frac{a_g + A_k}{2} < A_k\,,$$

dus $\dfrac{a_g + A_k}{2}$ is groter dan het grootste getal van de lage klasse en is kleiner dan het kleinste getal van de hoge klasse.

$\dfrac{a_g + A_k}{2}$ is dus niet ingedeeld.

§222.

Definitie: Een snede heet meetbaar (of rationaal) als de lage klasse van deze snede een grootste getal heeft of de hoge klasse van deze snede een kleinste getal bevat.

Deze snede bepaalt dus een meetbaar getal, namelijk het grootste (meetbare) getal van de lage klasse of het kleinste (meetbare) getal van de hoge klasse. Omgekeerd bepaalt elk meetbaar getal een snede: we nemen dit getal dan als kleinste getal van de hoge klasse of als grootste getal van de lage klasse. (zie §224: het gelijk zijn van twee sneden)

Voorbeeld:

Indien we onder de snede $a|A$ verstaan de verdeling waarbij in de lage klasse komen alle getallen kleiner dan $3\frac{1}{2}$, en in de hoge klasse alle andere getallen, heeft in dit geval de hoge klasse een kleinste getal, namelijk $3\frac{1}{2}$.

Als we onder de snede $b|B$ verstaan de verdeling waarbij in de hoge klasse komen alle getallen groter dan $3\frac{1}{2}$, en in de lage klasse alle andere getallen, heeft men in de hoge klasse geen kleinste getal en in de lage klasse een grootste getal, namelijk $3\frac{1}{2}$.

In beide gevallen wordt door de snede het getal $3\frac{1}{2}$ bepaald. We noemen daarom de sneden $a|A$ en $b|B$ gelijk.

XIII. IRRATIONALE (ONMEETBARE) GETALLEN

DEFINITIE EN EIGENSCHAPPEN

§223.

Definitie: Een snede heet onmeetbaar (of irrationaal) als de lage klasse geen grootste en de hoge klasse geen kleinste getal heeft.

Een onmeetbare snede bepaalt een *onmeetbaar getal.*

Dat zo'n snede bestaat blijkt uit het volgende:

Snede $a|A$ wordt als volgt gedefinieerd:

Tot de lage klasse a behoren alle negatieve getallen en het getal 0 en verder alle positieve getallen a, waarvoor geldt $a^2 < 2$.

Tot de hoge klasse behoren alle *positieve* meetbare getallen A, waarvoor geldt $2 < A^2$.

Zij a (we kunnen a positief veronderstellen) een getal waarvoor geldt: $a^2 < 2$. We tonen nu aan, dat a niet het grootste getal van klasse a kan zijn.

Daar $1^2 < 2$, kunnen we a groter dan 1 veronderstellen. We moeten nu aantonen, dat een positief getal c bestaat, zó dat $(a + c)^2 < 2$.

We moeten zorgen dat

$a^2 + 2ac + c^2 < 2$

$2ac + c^2 < 2 - a^2$ ($2 - a^2$ is positief!)

Stel $c < 1$;

dan is aan bovenstaande voldaan als:

$(2a + 1)c \leqslant 2 - a^2$,

dus als:

$$c \leqslant \frac{2 - a^2}{2a + 1}.$$

Inderdaad is c, omdat $a > 1$, kleiner dan 1.

Het getal $a + c$ is bij deze c groter dan a, maar $(a + c)^2 < 2$, dus $a + c$ is een getal *behorende in klasse a.*

Evenzo kan men bewijzen, dat bij deze snede klasse A geen kleinste getal heeft.

We stellen het onmeetbare getal, bepaald door deze snede, voor door $\sqrt{2}$ (spreek uit: 'wortel twee').

§224. Twee sneden $a|A$ en $b|B$ zijn gelijk als ze dezelfde verdeling in klassen bepalen, d.w.z. als elk getal van a een getal van b is en elk getal van A een getal van B is.

(Of anders gezegd: als elk getal van a een getal van b is en elk getal van b een getal van a is.)

Uit het voorbeeld van §222 is gebleken, dat de sneden $a|A$ en $b|B$ ook gelijk heten, als de indeling in zoverre verschilt, dat één en niet meer dan één getal anders is ingedeeld, m.a.w. als de indeling één en niet meer dan één getal verschilt. Het grootste getal van de lage klasse bij de ene snede is bij de andere snede het kleinste getal van de hoge klasse. Dit geval kan zich slechts voordoen bij meetbare sneden.

Als twee sneden verdelingen bepalen, die in bijvoorbeeld 2 getallen verschillen, verschillen ze in oneindig veel getallen.

Bijvoorbeeld: Als van $a|A$ en $b|B$ geldt $a_1 = B_1$ en $a_2 = B_2$, dan geldt (neem $a_1 < a_2$) het volgende:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} < a_2,$$

dus $\frac{a_1 + a_2}{2}$ behoort in klasse a.

$$B_1 < \frac{a_1 + a_2}{2},$$

dus $\frac{a_1 + a_2}{2}$ behoort in klasse B.

We vinden dus, dat nog een getal verschillend is ingedeeld, en dit geldt voor de oneindig veel getallen n waarvoor

$a_1 < n < a_2$.

§225. In verband met het in de vorige paragraaf behandelde stellen we:

Definitie: Twee sneden zijn gelijk als ze in de indeling van hoogstens één getal verschillen; twee sneden zijn ongelijk als minstens twee getallen verschillend zijn ingedeeld.

Daar het geval: verschillen in één en niet meer dan één getal, zich slechts bij de meetbare snede kan voordoen, heeft men bij

onmeetbare sneden slechts aan te tonen dat één getal anders is ingedeeld om tot ongelijkheid van deze (onmeetbare) sneden te besluiten.

Voorbeeld:

snede $a|A$: in a behoren alle negatieve getallen, het getal 0 en verder die positieve getallen a waarvoor $a^2 < 5$; de andere getallen behoren in A.

$a|A$ bepaalt het onmeetbare getal $\sqrt{5}$.

snede $b|B$: in b behoren alle getallen waarvan de derde macht kleiner dan 11 is; alle andere getallen behoren in B.

$b|B$ bepaalt het onmeetbare getal $\sqrt[3]{11}$.

$$2^2 < 5 < 3^2 \qquad 2^3 < 11 < 3^3$$
$$2{,}2^2 < 5 < 2{,}3^2 \qquad 2{,}2^3 < 11 < 2{,}3^3$$
$$2{,}23^2 < 5 < 2{,}24^2 \qquad 2{,}22^3 < 11 < 2{,}23^3$$

Hieruit blijkt, dat 2,23 behoort tot de lage klasse a en de hoge klasse B.

De onmeetbare getallen $\sqrt{5}$ en $\sqrt[3]{11}$ corresponderen met onmeetbare sneden, die, zoals is aangetoond, verdelingen bepalen die in minstens één getal verschillen, dus zijn $\sqrt{5}$ en $\sqrt[3]{11}$ ongelijk.

Omdat $a|A$ in de lage klasse een getal heeft (dat kleiner is dan het onmeetbare getal bepaald door $a|A$) dat bij de snede $b|B$ in de hoge klasse geplaatst is (dus dat groter is dan het onmeetbare getal bepaald door $b|B$) schrijven we:

$\sqrt[3]{11} < \sqrt{5}$.

§226. Het valt buiten het bestek van dit boek om aan te tonen dat de definities van de hoofdbewerkingen zo kunnen worden gegeven, dat de reeds bekende definities voor meetbare getallen in dit nieuwe systeem worden opgenomen. We zullen dit slechts aan de hand van een enkel geval illustreren.

De optelling wordt gedefinieerd als volgt: De som van de getallen bepaald door respectievelijk de sneden $a|A$ en $b|B$, is het getal bepaald door de snede $c|C$, waarvoor geldt, dat in klasse c alle meetbare getallen behoren die te schrijven zijn als de som van een getal uit a en een getal uit b.

Als we het onmeetbare getal bepaald door de snede $a|A$ optellen bij het meetbare getal m, ontstaat het getal bepaald door snede $c|C$.

We kunnen stellen, dat c bevat elk getal van de gedaante

$m_p + a_q$ (waarbij $m_p \leqslant m$), en C elk getal van de gedaante $m_q + A_q$ (waarbij $m \leqslant m_q$).

Daar a geen grootste getal en A geen kleinste getal bevat, volgt hieruit, dat c geen grootste en C geen kleinste getal bevat, zodat $c|C$ onmeetbaar is.

Eig. R₁. De som van een meetbaar en een onmeetbaar getal is onmeetbaar.

Zonder bewijs volgen nog de eigenschappen:

Eig. R₂. Het verschil van een meetbaar en een onmeetbaar getal is een onmeetbaar getal.

Eig. R₃. Het produkt van een meetbaar en een onmeetbaar getal is een onmeetbaar getal.

Eig. R₄. Het quotiënt van een meetbaar en een onmeetbaar getal is een onmeetbaar getal.

Opmerking:

De som van twee onmeetbare getallen kàn meetbaar zijn, bijv. $(3 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 3$.

Het verschil van twee onmeetbare getallen kàn meetbaar zijn, bijv. $(3 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 3$.

Het produkt van twee onmeetbare getallen kàn meetbaar zijn, bijv. $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

Het quotiënt van twee onmeetbare getallen kàn meetbaar zijn, bijv. $3\sqrt{5} : \sqrt{5} = 3$.

§227. Ook voor de onmeetbare getallen gelden de grondeigenschappen. Wederom zullen we dit niet aantonen, maar slechts aan de hand van een enkel geval illustreren. We kiezen daarvoor het bewijs van de commutatieve eigenschap van de optelling.

Te bewijzen: $a|A + b|B = b|B + a|A$.

Bewijs:

$$\text{Stel } a|A + b|B = c|C$$
$$b|B + a|A = d|D$$
$$a_p + b_q = c_r = b_q + a_p = d_s.$$

Daar elk getal van c te schrijven is als de som van twee getallen a en b, volgt hieruit, dat elk getal van c een getal van d is; omgekeerd is elk getal van d een getal van c, dus zijn $c|C$ en $d|D$ gelijk.

$a|A + b|B = b|B + a|A.$

De meetbare en de onmeetbare getallen vormen samen het stelsel van de *reële getallen.*

BOVENSTE EN ONDERSTE GRENS

§228.

Definitie: Een niet-lege getallenverzameling V heet naar boven begrensd, als een getal M bestaat, zo, dat voor elk getal n van V geldt $n < M$.

Definitie: Onder de bovenste grens van een niet-lege getallenverzameling V (met getallen n) verstaat men het getal B (dat al of niet tot V behoort) met de volgende eigenschappen:

a. $n \leqslant B$;
b. *is* $P < B$, *dan is minstens één getal van V groter dan P.*

Eig. R_5. Een naar boven begrensde niet-lege getallenverzameling heeft een bovenste grens.

Bewijs:

De verzameling is naar boven begrensd, dus er bestaat een getal M, zo, dat voor elk getal n van V geldt: $n < M$.

We verdelen alle meetbare getallen volgens de snede $a|A$ in twee klassen:

In klasse A behoren alle getallen die groter zijn dan elk getal uit V.

In klasse a behoren alle andere getallen.

Klasse A is niet leeg, want A bevat elk meetbaar getal dat groter dan M is.

Ook klasse a is niet leeg.

Het getal voorgesteld door $a|A$ noemen we α.

Onderstel, er bestaat een getal $\beta > \alpha$ en β behoort tot V. Dan bestaat ook een getal m waarvoor geldt $\alpha < m < \beta$.

$m > \alpha$, dus m is een getal van A.

$m < \beta$, dus m is een getal van a.

Dit is een ongerijmdheid, dus V bevat geen getal groter dan α.

Zij α' een getal kleiner dan α.

$\alpha' < p < \alpha$

$p < \alpha$, dus p is een getal van klasse a.

Dus p is niet groter dan elk getal van V; hieruit volgt dat

V een getal bevat dat niet kleiner dan p, dus dat groter dan α' is.

Hieruit volgt α is de bovenste grens van V.

Analoog geldt:

Definitie: Een niet-lege getallenverzameling V heet naar onderen begrensd, als een getal m bestaat, zo, dat voor elk getal van V geldt: $m < n$.

Definitie: Onder de onderste (benedenste) grens van een niet-lege getallenverzameling V (met getallen n) verstaan we het getal b (dat al of niet tot V behoort) met de eigenschappen:

a. $n \geqslant b$;

b. is $p > b$, dan is minstens één getal van V kleiner dan p.

Analoog met het bewijs van eig. R_5 is het bewijs van:

Eig. R_6. Een naar onderen begrensde niet-lege verzameling (van reëele getallen) heeft een onderste grens.

AANHANGSEL I

OVERZICHT VAN DE GETALLEN

§229. Volledigheidshalve delen we mede, dat ten slotte door het vormen van getallenparen (a, b), waarbij a en b reële getallen zijn, de reële getallen nog kunnen worden aangevuld met de *imaginaire getallen*, waardoor het stelsel van *complexe getallen* (reële en imaginaire getallen) ontstaat.

Hieronder volgt een overzicht van de in dit boek ingevoerde getallen:

- complexe getallen
 - reële getallen
 - meetbare getallen
 - gehele getallen
 - aantallen
 - natuurlijke getallen
 - het getal 0
 - negatieve gehele getallen
 - gebroken getallen
 - onmeetbare getallen
 - imaginaire getallen

AANHANGSEL II

VERKORTE ALGORITMEN VAN DE VERMENIGVULDIGING

§230. De algoritmen van de vermenigvuldiging (zie §79) kunnen vaak zeer verkort op andere wijze worden uitgevoerd. Hierbij maken we meestal tevens gebruik van bepaalde bijzonderheden van één of beide factoren.

Bij 12×2345 kan elk cijfer van 2345 met 12 vermenigvuldigd worden:

$$\begin{array}{r} 2345 \\ \underline{12} \\ 28140 \end{array} \times$$

$12 \times 5 = 60$; 0 opschrijven, 6 onthouden.
$12 \times 4 = 48$, $48 + 6 = 54$;
4 opschrijven, 5 onthouden.
$12 \times 3 = 36$, $36 + 5 = 41$;
1 opschrijven, 4 onthouden.
$12 \times 2 = 24$, $24 + 4 = 28$.

Bij het volgende geval splitsen we de onderste factor in twee groepen van twee cijfers (rechts beginnend):

$$\begin{array}{r} 62538 \\ \underline{14|15} \\ 938070 \\ \underline{87553200} \\ 88491270 \end{array} \times$$

We vermenigvuldigen het bovenste getal eerst met 15, daarna (*twee* nullen plaatsen) met 14.

Een uitbreiding van deze methode is, dat we ook de andere factor in groepen van twee cijfers splitsen:

$$\begin{array}{r} 6|15 \\ \underline{2|14} \\ 8610 \\ \underline{123000} \\ 131610 \end{array} \times$$

$14 \times 15 = 210$; 10 opschrijven, 2 onthouden.
$14 \times 6 = 84$, $84 + 2 = 86$.
Tweede regel: eerst twee nullen plaatsen;
$15 \times 2 = 30$; opschrijven.
$2 \times 6 = 12$.

§231. Bij de in §230 geschetste manier van vermenigvuldigen zal men des te gemakkelijker werken naarmate men beter getallen van twee cijfers uit het hoofd kan vermenigvuldigen.

Bij dit hoofdrekenen, waarbij men gebruik maakt van bepaalde relaties tussen de getallen (die men moet vermenigvuldigen in dit geval) geeft het kennen van de kwadraten of het snel kunnen uitrekenen van de kwadraten veel steun.

Merk in dit verband op, dat de rij van de kwadraten als verschilrij de rij van de oneven getallen oplevert:

$$\begin{array}{rcrcl} 0^2 & = & 0 & & \\ & & & \rangle & 1 \\ 1^2 & = & 1 & & \\ & & & \rangle & 3 \\ 2^2 & = & 4 & & \\ & & & \rangle & 5 \\ 3^2 & = & 9 & & \\ & & & \rangle & 7 \\ 4^2 & = & 16 & & \end{array}$$

Het verschil van 14^2 en $15^2 = 29 \quad (14 + 15)$.

$$\begin{array}{rcrcl} 12^2 & = & 144 & & \\ & & & \rangle & 25 \\ 13^2 & = & 169 & & \\ & & & \rangle & 27 \\ 14^2 & = & 196 & & \\ & & & \rangle & 29 \\ 15^2 & = & 225 & & \end{array}$$

Het verschil van de kwadraten van twee opvolgende getallen is gelijk aan de som van die getallen.

Bewijs:

$$\begin{array}{rcl} (n+1)^2 & = & n^2 + 2n + 1 \\ n^2 & = & n^2 \\ \hline (n+1)^2 - n^2 & = & 2n + 1 = (n+1) + n. \end{array}$$

Met behulp hiervan kunnen we gemakkelijk kwadraten berekenen door gebruik te maken van de kwadraten van de 5-vouden (als 40^2, 25^2, 45^2 ...) die zeer gemakkelijk zijn te bepalen (zie §236).

Bijvoorbeeld:

$41^2 = 40^2 + 40 + 41 = 1600 + 81 = 1681$

$26^2 = 25^2 + 25 + 26 = 676$

$29^2 = 30^2 - (30 + 29) = 900 - 59 = 841$

$32^2 = 30^2 + 30 + 31 + 31 + 32 = 30^2 + 4 \times 31$

$42^2 = 40^2 + 4 \times 41$

$23^2 = 25^2 - 4 \times 24.$

Kwadraten van getallen die op 5 eindigen, laten zich zeer gemakkelijk berekenen (zie voor de verklaring §232):

$$15^2 = (1 \times 2 = 2 \quad 5 \times 5 = 25) = 225$$

$$25^2 = (2 \times 3 = 6 \quad 5 \times 5 = 25) = 625$$
$$35^2 = (3 \times 4 = 12 \quad 5 \times 5 = 25) = 1225.$$

De kwadraten kunnen ook berekend worden door de volgende formules toe te passen:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Bijvoorbeeld:

$$52^2 = (50 + 2)^2 = 50^2 + 4 \times 50 + 2^2 = 2500 + 200 + 4;$$
$$58^2 = (60 - 2)^2 = 60^2 - 4 \times 60 + 2^2 = 3600 - 240 + 4.$$

Soms kan men gebruik maken van de formule

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2:$$
$$37 \times 43 = (40 - 3)(40 + 3) = 1600 - 9$$
$$12\tfrac{1}{2} \times 11\tfrac{1}{2} = (12 + \tfrac{1}{2})(12 - \tfrac{1}{2}) = 144 - \tfrac{1}{4}$$
$$106 \times 95 = 106 \times 94 + 106 = (100 + 6)(100 - 6) + 106 =$$
$$= 10000 - 36 + 106 = 10000 + 70.$$

§232. Nog een verkorte algoritme van de vermenigvuldiging berust op:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$
$$37 \times 54 = (30 + 7)(50 + 4) =$$
$$= 3 \times 5 \text{ honderdtallen} + (4 \times 3 + 7 \times 5)\text{tientallen} + 4 \times 7.$$

In algoritmevorm wordt dit als volgt uitgevoerd:

```
  37
  54   ×
  --
  28      7 × 4 = 28
 47.      3 × 4 + 7 × 5 = 47
15..      5 × 3 = 15.
----
1998
```

Dit kan ook met groepen van twee cijfers:

```
   4012
    315  ×
   ----
    180    15 × 12 = 30 × 6 = 180
  636..    3 × 12 + 15 × 40 = 36 + 600 = 636
120....    3 × 40 = 120.
-------
1263780
```

Een bijzonder geval hebben we, als de eenheden van de twee factoren samen 10 zijn en de tientallen gelijk zijn:

63	
67 ×	
21	$3 \times 7 = 21$
42. .	$(7 \times 6 + 3 \times 6)$tientallen $= 1 \times 6$ honderdtallen
4221	1×6 honderdt. $+ 6 \times 6$ honderdt. $= 7 \times 6$ honderdtallen.

De antwoorden van de volgende gevallen zijn zonder algoritme op te schrijven:

$53 \times 57 = 3021$;	$5 \times 6 = 30$,	$3 \times 7 = 21$
$81 \times 89 = 7209$;	$8 \times 9 = 72$,	$1 \times 9 = 09$ (*twee* cijfers!)
$65 \times 65 = 4225$;	$6 \times 7 = 42$,	$5 \times 5 = 25$
$124 \times 126 = 15624$;	$12 \times 13 = 156$,	$4 \times 6 = 24$.

AANHANGSEL III

BENADERDE WAARDEN

NAUWKEURIGHEID, VOLSTREKTE EN RELATIEVE FOUT

§233. De aardomtrek wordt meestal gesteld op 40.000 km. De omtrek van de equator van de aarde is echter 40.076.594 m. De eerste grootheid is een *afronding* van de tweede.

Het getal π, onmeetbaar getal dat de verhouding tussen omtrek en middellijn van een cirkel aangeeft, is gelijk aan 3,1415926535897932 ... (met een oneindig aantal cijfers achter de komma), maar wordt dikwijls afgerond tot 3,1416 of zelfs 3,14.

$\sqrt{3} = 1,7320508 \ldots$ kan op de volgende manieren worden afgerond:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 1,732051\\ &= 1,73205\\ &= 1,7321\\ &= 1,732\\ &= 1,73\\ &= 1,7\end{aligned}$$

De afrondingen worden uit een vorige benadering verkregen door een aantal cijfers aan het eind te schrappen; als het eerste van de geschrapte cijfers 5 of meer is, wordt het daarvóór staande cijfer (dus het meest rechtse van de op te schrijven cijfers) met 1 vermeerderd.

Bovenstaande benaderingen zijn nauwkeurig op een *halve eenheid der laatste decimaal* ($\frac{1}{2}$ edld). Zo is $\sqrt{3} = 1,73205$ nauwkeurig op $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. Dit betekent, dat het verschil tussen de werkelijke waarde en de benadering niet groter is dan $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$:

$$1,732045 \leqslant 1,73205 < 1,732055,$$

waarbij 1, 73205 een benaderde waarde is. Een benaderde waarde als 1, 732 daarentegen geeft $\sqrt{3}$ slechts nauwkeurig op een half duizendste ($\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$).

Uit het voorbeeld gegeven aan het begin van deze paragraaf volgt, dat de omtrek van de aarde gegeven als 40.000 km nauwkeurig is in de orde van 10^3 km. Een nauwkeuriger be-

nadering is 401 · 10^2 km, wat wil uitdrukken, dat de omtrek minder dan $\frac{1}{2} \cdot 10^2$ km van deze waarde verschilt.

Onder de *volstrekte fout* verstaan we het verschil tussen de werkelijke waarde en de benaderde waarde.

In bepaalde gevallen is de werkelijke waarde niet aan te geven. Als een hardloper 100 m in 10,2 sec. aflegt, dan wil dat zeggen dat de tijdsduur is gelegen tussen 10,15 en 10,25 sec.

Onder de *relatieve* of *betrekkelijke fout* verstaan we de verhouding van het maximum van het verschil van werkelijke waarde en benaderde waarde, en de benaderde waarde. In het voorbeeld van de hardloper is de relatieve fout

$$\frac{0{,}05}{10{,}2} = \frac{1}{204}.$$

Het vermelden van de relatieve fout geeft een juist inzicht in de mate van nauwkeurigheid van een bepaald gegeven. Wordt een getal gegeven in de vorm 3, 147256 $f < \frac{1}{2}$ edld, dan betekent dit:

1. het getal ligt tussen 3, 1472555 en 3, 1452565;
2. de relatieve fout is ongeveer 1 : 6.000.000.

In 5 decimalen nauwkeurig is dit getal 3, 14726.

BEWERKINGEN MET BENADERDE WAARDEN

§234. *a. Optelling*

Beschouwen we de volgende optelling van een viertal benaderde waarden:

	min. waarde (5 dec)	bovenste grens van de max. waarden (5 dec)
1,2432	1,24315	1,24325
1,8463	1,84625	1,84635
2,1869	2,18685	2,18695
1,3465	1,34645	1,34655
6,6229	6,62270	6,62310

De werkelijke waarde ligt tussen 6,62270 en 6,62310. Op $\frac{1}{2}$ edld nauwkeurig is de uitkomst 6,623. Elke term van de som is nauwkeurig op $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. De som van 4 termen is dan nauwkeurig op $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-4} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$. Het antwoord kan dus in 3 decimalen nauwkeurig gegeven worden.

Tellen we een aantal benaderde waarden op, dan zal in het antwoord het laatste cijfer vervallen als het aantal termen 10 of minder bedraagt; is het aantal termen groter dan 10 (en kleiner of gelijk aan 100) dan vervallen de laatste twee cijfers.

Opmerking: Bestaan de termen uit getallen met een ongelijk aantal decimalen, dan is het getal met het kleinste aantal decimalen bepalend voor de benadering van de som. Alle getallen worden op een zelfde, zo groot mogelijk, aantal decimalen afgerond.

2, 174325		2,174		
1, 874		1,874		
2, 625		2,625		
8, 43971	+	8,440	+	4 + 4 + 5 = 13, niets opschrijven, 1 onthouden.
		15,11		

b. Aftrekking

Bij een aftrekking is de fout in het verschil gelijk aan de som van de fouten van aftrektal en aftrekker.

Bijvoorbeeld:

1,2743
0,8675 –
0,4068

Zijn aftrektal en aftrekker nauwkeurig op $\frac{1}{2}$ edld, dan is het verschil nauwkeurig op één edld, d.w.z. het verschil ligt tussen 0,4067 en 0,4069. Wil men het verschil geven met de nauwkeurigheid van $\frac{1}{2}$ edld dan wordt de (onnauwkeuriger) benaderde waarde 0,407.

c. Vermenigvuldiging

Het produkt van twee benaderde waarden ligt tussen het produkt van de 'minimale' waarden en het produkt van de 'maximale' waarden.

Bereken: $3{,}1416 \times 0{,}319 \quad (f < \frac{1}{2}$ edld)

Berekening: $3{,}14155 \times 0{,}3185 = 1{,}000583675$

$3{,}14164 \times 0{,}3194 = 1{,}003439816$

Het produkt is dus in 2 decimalen nauwkeurig 1,00.

In het algemeen: Zijn de factoren a en b en de fouten resp. f_1 en f_2, dan volgt hieruit:

$$(a - f_1) \cdot (b - f_2) < ab < (a + f_1) \cdot (b + f_2).$$

Het verschil tussen de minimale en maximale waarde is:

$F = 2(a \cdot f_2 + b \cdot f_1)$.

In het bovenstaande voorbeeld wordt dit:

$2(3{,}1416 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} + 0{,}319 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}) \approx$

$2(31 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}) \approx$ ($\approx$ betekent: ongeveer gelijk aan)

$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} < F < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$,

waaruit volgt dat het produkt een nauwkeurigheid in 2 decimalen kan worden gegeven (op $\frac{1}{2}$ edld nauwkeurig).

Bij de uitvoering van de vermenigvuldiging wordt bij de normale toepassing van de algoritme der vermenigvuldiging veel overbodig werk verricht. Handige toepassing van een algoritme der vermenigvuldiging volgens §230 kan hier besparend werken.

d. Deling

Zijn a en b benaderde waarden met resp. de fouten f_1 en f_2, dan zijn de minimale en de maximale waarde van het quotiënt $a : b$

$$\frac{a - f_1}{b + f_2} \quad \text{en} \quad \frac{a + f_1}{b - f_2}.$$

Het verschil hiervan is gelijk aan

$$\frac{2(af_2 + bf_1)}{b^2 - f_2^2},$$

dit is ongeveer gelijk aan

$$\frac{2(af_2 + bf_1)}{b^2}.$$

Bijvoorbeeld:

Geef aan in hoeveel decimalen nauwkeurig het quotiënt 12,435 : 3,6431 gegeven kan worden.

Oplossing: $F \approx \dfrac{2(12{,}435 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} + 3{,}6431 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3})}{3{,}6431^2} \approx$

$$\approx \frac{4{,}88 \cdot 10^{-3}}{10} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Het quotiënt, gegeven in 3 decimalen, is dus tot op $\frac{1}{2}$ eenheid der laatste decimaal nauwkeurig.

AANHANGSEL IV

PERMUTATIES, VARIATIES EN COMBINATIES

PERMUTATIES

§235. Beschikken we over een verzameling van n verschillende elementen, dan kunnen we ons de vraag stellen, op hoeveel manieren deze n elementen achter elkaar gerangschikt kunnen worden.

Zijn de elementen bijv. □ ○ △ ×, dan krijgen we de volgende verschillende rangschikkingen:

□	○	△	×	○	□	△	×
□	○	×	△	○	□	×	△
□	△	○	×	○	△	□	×
□	△	×	○	○	△	×	□
□	×	△	○	○	×	△	□
□	×	○	△	○	×	□	△

△	□	○	×	×	□	○	△
△	□	×	○	×	□	△	○
△	○	□	×	×	○	□	△
△	○	×	□	×	○	△	□
△	×	□	○	×	△	□	○
△	×	○	□	×	△	○	□

Blijkbaar bestaan er 24 verschillende manieren om 4 elementen te rangschikken. Het aantal *permutaties* is 24.

Definitie: Onder het aantal permutaties van n elementen verstaat men het aantal manieren, waarop deze n elementen achter elkaar kunnen worden gerangschikt.

Dit aantal duiden we aan met P_n.

Om P_n te bepalen merken we op, dat de permutaties n verschillende aanvangselementen kunnen hebben. Is één element als beginelement gekozen, dan wordt dit gevolgd door de overige $n - 1$ elementen in willekeurige volgorde. Het aantal

manieren waarop deze achter het beginelement kunnen worden gerangschikt, is P_{n-1}.

Hieruit volgt $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Dus geldt ook $P_{n-1} = (n-1) \cdot P_{n-2}$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$P_2 = 2P_1$$

Bovendien $P_1 = 1$.

Dus $P_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Dit produkt wordt geschreven als $n!$ (spreek uit: 'n faculteit'). $n!$ is het produkt der natuurlijke getallen niet groter dan n:

$P_n = n!$

Toepassingen:

1. Op hoeveel manieren kunnen 7 personen op een rij gerangschikt worden?

 Oplossing: $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

2. Op hoeveel manieren kunnen 7 personen om een ronde tafel gerangschikt worden?

 Oplossing: Aangezien de elementen nu een gesloten rij vormen, kiezen we één persoon als begin van de rij en gaan we na op hoeveel manieren deze door 6 anderen kan worden gevolgd. Dit aantal is 6!.
 $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

VARIATIES

§236. Beschikken we over de elementen □ ○ △ ×, dan kunnen we nagaan, op hoeveel manieren we drie van deze vier elementen in verschillende volgorde kunnen rangschikken:

□ ○ △	○ □ △	△ □ ○	× □ ○
□ △ ○	○ △ □	△ ○ □	× ○ □
□ ○ ×	○ □ ×	△ □ ×	× □ △
□ × ○	○ × □	△ × □	× △ □
□ △ ×	○ △ ×	△ ○ ×	× ○ △
□ × △	○ × △	△ × ○	× △ ○

Dit aantal blijkt dus 24 te zijn.

We noemen dit het aantal *variaties* drie aan drie van vier elementen.

Definitie: Onder het aantal variaties van n elementen p aan p verstaat men het aantal manieren waarop men uit n elementen p elementen in verschillende volgorde kan rangschikken.

Dit aantal wordt aangegeven door V_n^p.

V_4^3 kunnen we als volgt bepalen. We kunnen op 4 manieren een eerste element kiezen. Na dit gekozen element kan men op 3 manieren een tweede element kiezen, waarna nog op 2 manieren een derde element uit het totaal van 4 elementen kan worden genomen. We komen dus tot $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ manieren.

Om V_n^p te bepalen, overwegen we, dat op n manieren het eerste van de p elementen kan worden gekozen; op $n - 1$ manieren het tweede van de p elementen; op $n - 2$ manieren het derde, enz. Het p-de element kan nog op $n - p + 1$ manieren worden bepaald. Dit geeft dus

$$V_n^p = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-p+1).$$

Een andere schrijfwijze geeft

$$V_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)(n-p)\dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Opmerking: Is $p = n$, dan krijgen we het aantal manieren waarop n elementen n aan n kunnen worden gerangschikt. Dit is het aantal permutaties van n. Definiëren we 0! als 1, dan blijft de formule geldig:

$$V_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = P_n.$$

Toepassingen:

1. Hoeveel getallen van vijf cijfers kunnen met 5 van nul verschillende cijfers worden gevormd, als elk cijfer in elk getal eenmaal wordt gebruikt?
 Oplossing: Dit aantal is $P_5 = 5! = 120$.

2. Hoeveel getallen kunnen met 5 van nul verschillende cij-

fers worden gevormd, als een cijfer in elk getal slechts eenmaal kan worden gebruikt?
Oplossing: De getallen kunnen bestaan uit 1, 2, 3, 4 of 5 cijfers.
Dit aantal is

$$V_5^1 + V_5^2 + V_5^3 + V_5^4 + V_5^5 =$$
$$5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 325.$$

COMBINATIES

§237.
Definitie: Onder het aantal combinaties van n elementen p aan p verstaat men het aantal manieren waarop uit n elementen p elementen tot een groep kunnen worden gevormd.

(Het is hierbij dus *niet* van belang *in welke* volgorde de elementen in een groep voorkomen.)

Dit aantal combinaties stelt men voor door C_n^p.

Met de reeds ingevoerde elementen □ ○ △ × zijn de volgende combinaties van drie elementen mogelijk:

□ ○ △
□ ○ ×
□ △ ×
○ △ ×

$C_4^3 = 4.$

De bovenstaande groeperingen komen uiteraard voor in de groeperingen van V_4^3, met dien verstande, dat elke bovenstaande groep daar nog op alle mogelijke manieren gepermuteerd is.
Hieruit volgt

$$C_4^3 \cdot P_3 = V_4^3.$$

In het algemeen

$$C_n^p \cdot P_p = V_n^p, \quad \text{dus } C_n^p = \frac{V_n^p}{P_p}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Een andere schrijfwijze is

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

Opmerkingen:

1. Uit de formule

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

blijkt, dat $C_n^p = C_n^{n-p}$ is, daar de uitkomst niet verandert, als men p door $n - p$ vervangt. Deze eigenschap is ook duidelijk, als men inziet dat het verenigen in groepen van p neerkomt op het weglaten van groepen van $n - p$ elementen uit de totaalverzameling.

2. Als $p = n$ is, ontstaat door toepassing van deze eigenschap $C_n^n = C_n^0$; C_n^n is dus het aantal manieren om uit n elementen groepen van n elementen te vormen. Dit kan op 1 manier, namelijk door alle elementen te gebruiken. Ook hier gaat de formule op als we $0! = 1$ definiëren.

Toepassing:

Beschouwen we de ontwikkeling van
$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$.

Elke term uit de hieruit te verkrijgen veelterm ontstaat als het produkt van één term uit elk der factoren.

Het aantal factoren a^5 is gelijk aan het aantal manieren waarop we uit elk der factoren termen a kunnen nemen zo dat het produkt a^5 is. Dit aantal is 1.

Een term ab^4 ontstaat door uit één factor een term a en uit de overige 4 factoren een term b te combineren. Dit aantal is $C_5^1 = C_5^4$.

Een term a^2b^3 ontstaat door uit 2 factoren een term a, dus uit de overige 3 factoren een term b te kiezen. Dit aantal is $C_5^2 = C_5^3$.

Zo voortgaande krijgt men:

$$(a + b)^5 = a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + b^5 =$$
$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

In het algemeen:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \ldots + C_n^p a^{n-p}b^p + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

In verkorte schrijfwijze wordt dit genoteerd als:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}b^p .$$

(Dit is de zogenaamde *sigma-notatie*, waarmee bedoeld wordt de som van alle termen van de gedaante $C_n^p a^{n-p}b^p$, waarin p achtereenvolgens de waarden van 0 tot en met n aanneemt.)

TOEPASSINGEN

§238. Nog enkele voorbeelden van permutaties, variaties en combinaties.

1. Op hoeveel manieren kunnen 52 verschillende kaarten onder 4 personen verdeeld worden, waarbij ieder 13 kaarten krijgt?
 Oplossing: Het aantal manieren waarop 52 kaarten in groepen van 13 samengesteld kunnen worden, om aan de eerste speler te kunnen worden uitgedeeld is C_{52}^{13}. De tweede speler kan op C_{39}^{13} manieren uit de resterende 39 kaarten er 13 toebedeeld krijgen. Voor de derde speler zijn er dan nog C_{26}^{13} verschillende mogelijkheden. Het totaal aantal mogelijkheden is dus:

 $$C_{52}^{13} \cdot C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13} = \frac{52!}{13!\,39!} \cdot \frac{39!}{13!\,26!} \cdot \frac{26!}{13!\,13!} =$$

 53644 737765 488792 839237 440000.

2. Wat is de kans, dat onder 13 kaarten die uit 52 kaarten worden gegeven, zich 4 azen bevinden?
 Oplossing: Onder *kans* verstaat men het quotiënt van het aantal gunstige mogelijkheden en het totale aantal mogelijkheden.

 Het totale aantal mogelijkheden waarop 13 kaarten uit 52 worden getrokken, is C_{52}^{13}.

 Onder 13 kaarten zijn 4 azen, als 9 kaarten niet-azen zijn; dit wil zeggen: het aantal mogelijkheden, dat 9 kaarten van de 13 niet-azen zijn, is gelijk aan het aantal

manieren waarop 9 kaarten uit de 48 niet-azen kunnen worden gecombineerd. Dit aantal is C_{48}^{9}.

De kans is dus $\dfrac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}} = \dfrac{11}{4165}$.

3. Ga het aantal mogelijkheden na waarop een voetbaltoto-formulier kan worden ingevuld.
Oplossing: Op een toto-formulier komen, in een bepaalde volgorde, 13 wedstrijden voor. Aan elke wedstrijd moet het totocijfer 1, 2 of 3 worden gegeven.
We zullen het totale aantal mogelijkheden M_{13} noemen.
De eerste wedstrijd kan het totocijfer 1, 2 of 3 toebedeeld krijgen. Het totale aantal mogelijkheden is dus drie maal het aantal mogelijkheden dat bij 12 wedstrijden bestaat.
Dus $M_{13} = 3 \cdot M_{12}$.
De tweede wedstrijd krijgt weer het totocijfer 1, 2 of 3, waaruit volgt $M_{12} = 3 \cdot M_{11}$. Zo voortgaande komt men tenslotte tot $M_2 = 3M_1$; $M_1 = 3$.
Uit dit alles volgt: $M_{13} = 3^{13} = 1\,594323$.

OVERZICHT VAN EIGENSCHAPPEN EN FORMULES

Hoofdeigenschap van de telling:

Het aantal elementen van een verzameling is onafhankelijk van de volgorde en de groepering der elementen.

O_1 $a + b = b + a$

O_2 $(a + b) + c = a + (b + c)$

O_{11} $a + b + c + d + e = a + b + d + c + e$

O_{22} $a + b + c + d + e + f =$
$= a + (b + c) + (d + e + f)$

A_1 $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$

A_2 $a - b = (a + p) - (b + p)$

A_3 $(a - b) + p = (a + p) - b$

A_4 $(a - b) + p = a - (b - p)$

A_5 $(a - b) - p = (a - p) - b$

A_6 $(a - b) - p = a - (b + p)$

Moduluseigenschap der vermenigvuldiging:

$a \times 1 = a; \quad 1 \times a = a.$

V_1 $a \times b = b \times a$

V_2 $a \times b \times c = (a \times b) \times c$

V_{11} $a \times b \times c \times d \times e = a \times b \times d \times c \times e$

V_{22} $a \times b \times c \times d \times e \times f = b \times (a \times d \times f) \times c \times e$

V_3 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

V_{33} $a \times (b + c + d) = a \times b + a \times c + a \times d$

V_4 $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

D_1 $(a : b) \times (c : d) = (a \times c) : (b \times d)$

D_2 $a : b = a \times p : b \times p$

D_3 $(a : b) \times p = a \times p : b$

D_4 $(a : b) \times p = a : (b : p)$

D_5 $(a : b) : p = (a : p) : b$

D_6 $(a : b) : p = a : b \times p$

D_7 $(a + b) : c = a : c + b : c$

D_8 $(a - b) : c = a : c - b : c$

M_1 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

M_{11} $(a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$

M_2 $(a : b)^n = a^n : b^n$

M_3 $a^p \times a^q = a^{p+q}$

M_4 $a^p : a^q = a^{p-q}$

M_5 $(a^p)^q = a^{q \times p}$

W_1 $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b}$

W_{11} $\sqrt[p]{abc} = \sqrt[p]{a} \times \sqrt[p]{b} \times \sqrt[p]{c}$

W_2 $\sqrt[p]{a : b} = \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b}$

W_3 $\sqrt[p]{a^n} = a^{n:p}$

W_4 $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$

W_5 $(\sqrt[p]{a})^n = \sqrt[p]{a^n}$

W_6 $\sqrt[p]{a^n} = \sqrt[qp]{a^{qn}}$

L_1 ${}^p\log ab = {}^p\log a + {}^p\log b$

L_2 ${}^p\log (a : b) = {}^p\log a - {}^p\log b$

L_3 ${}^p\log a^n = n \cdot {}^p\log a$

L_4 ${}^p\log \sqrt[n]{a} = {}^p\log a : n$

Moduluseigenschap van de optelling:

$a + 0 = a; \quad 0 + a = a.$

D_9 Als men deler en deeltal van een niet-opgaande deling met hetzelfde getal vermenigvuldigt, wordt de rest met dit getal vermenigvuldigd en verandert het quotiënt niet.

Db_1 Als *a* deelbaar is door *b* en *b* deelbaar door *c* is, volgt hieruit: *a* is deelbaar door *c*.

Db_2 Een gemene deler van twee of meer getallen is een deler van de som van die getallen.

Db_3 Een gemene deler van twee getallen is een deler van het verschil van die getallen.

Db_4 Als van twee getallen het ene wel, het andere niet door eenzelfde getal deelbaar is, is hun som niet deelbaar door dat getal.

Db_5 Als van twee getallen het ene wel, het andere niet door eenzelfde getal deelbaar is, is hun verschil niet deelbaar door dat getal.

Db_6 Van *n* opvolgende getallen is één en niet meer dan één deelbaar door *n*.

Db_7 Elk getal groter dan 1 is door minstens één priemgetal deelbaar.

Db_8 Er bestaat geen grootste priemgetal.

Db_9 Elk getal groter dan 1 is op één en niet meer dan één manier als produkt van priemgetallen te schrijven.

Db_{10} Van twee getallen is het ene dan en dan alleen deelbaar

door het andere, als bij ontbinding van beide getallen in priemfactoren in het eerste getal alle priemfactoren voorkomen met dezelfde of grotere exponent.

Db_{11} Van het getal $n = a^p \cdot b^q \cdot c^r$ (a, b en c priem) is het aantal delers $(p + 1)(q + 1)(r + 1)$.

Van een getal g met n delers is het produkt van de delers $\sqrt{g^n}$.

Db_{12} De G.G.D. van twee getallen is tevens de G.G.D. van één van die getallen en het verschil van het andere getal en een willekeurig veelvoud van het eerste getal.

Db_{12} De G.G.D. van deler en deeltal is gelijk aan de G.G.D. van deler en rest.

Db_{13} Een gemene deler van twee getallen is een deler van hun G.G.D.

Db_{14} De G.G.D. van twee getallen is gelijk aan het (gedurig) produkt van de machten van de gemeenschappelijke priemfactoren van die getallen, waarbij de macht van elke priemfactor tot exponent heeft de kleinste van de exponenten van diezelfde factor welke in die getallen voorkomen.

Db_{15} Als men twee getallen met hetzelfde getal vermenigvuldigt, wordt hun G.G.D. met dat getal vermenigvuldigd.

Db_{16} Als men twee getallen door hetzelfde getal deelt, wordt hun G.G.D. door dat getal gedeeld.

Db_{17} Als men twee getallen door hun G.G.D. deelt, zijn de quotiënten onderling ondeelbaar.

Db_{18} Als a onderling ondeelbaar is met b, is a ook onderling ondeelbaar met een deler van b.

Db_{19} Als een produkt van twee factoren deelbaar is door een getal dat onderling ondeelbaar is met één van de factoren, dan is dat getal een deler van de andere factor.

Db_{20} Als men van twee getallen één van de getallen vermenigvuldigt met een getal dat onderling ondeelbaar is met het andere getal, verandert de G.G.D. niet.

Db_{21} Als een getal onderling ondeelbaar is met twee andere getallen, is het getal onderling ondeelbaar met het produkt van die getallen.

Db_{22} Als een getal onderling ondeelbaar is met enige getallen, is dat eerste getal onderling ondeelbaar met het produkt van die getallen.

Db_{23} Als twee getallen onderling ondeelbaar zijn, zijn machten van die getallen ook onderling ondeelbaar.

Db_{24} Als een (gedurig) produkt deelbaar is door een priemgetal, is minstens één van de factoren deelbaar door dat priemgetal.

Db_{25} Het K.G.V. van twee getallen is het produkt van hun G.G.D. en de quotiënten welke bij deling van die getallen door hun G.G.D. ontstaan.

Db_{26} Het produkt van twee getallen is het produkt van hun G.G.D. en hun K.G.V.

Db_{27} Het K.G.V. van twee getallen is gelijk aan het (gedurig) produkt van de machten van alle priemfactoren die minstens in één van de getallen voorkomen, waarbij de macht van elke priemfactor tot exponent heeft de grootste van de exponenten van de machten van diezelfde factor welke in die getallen voorkomen.

K_1 Elk getal is de som van een veelvoud van g^n en het getal gevormd door de laatste n cijfers (g is het grondtal van het talstelsel).

K_2 De rest bij deling van een getal door een deler van g^n is gelijk aan de rest bij deling van deze deler op het getal gevormd door de laatste n cijfers.

K_3 Een getal is dan en dan alleen deelbaar door een deler van g^n die geen deler van g^{n-1} is, als het getal gevormd door de laatste n cijfers deelbaar door die deler is.

K_4 Elke macht van g is een $(g - 1)$voud $+ 1$.

K_5 Elk getal is te splitsen in een $(g - 1)$voud en de som van de cijfers.

K_6 De rest bij deling van een getal door een deler van het grondtal min één is gelijk aan de rest bij deling van deze deler op de som van de cijfers.

K_5' Elk getal is te splitsen in een $(g^n - 1)$voud en de som van de getallen die ontstaan als men, rechts beginnend, de cijfers verdeelt in groepen van n cijfers.

K_7 Iedere macht van g met even exponent is een $(g + 1)$-voud $+ 1$; iedere macht van g met oneven exponent is een $(g + 1)$voud $- 1$.

K_8 Elk getal is een $(g + 1)$voud, vermeerderd met de som van de cijfers van oneven rang en verminderd met de som van de cijfers van even rang.

K_9 Elk getal is een $(g^n + 1)$voud, vermeerderd met de som van de getallen op de oneven plaatsen, verminderd met de som van de getallen op de even plaatsen, waarbij de

getallen ontstaan door de cijfers te splitsen in groepen van n cijfers.

B_1 Als $t_1 > t_2$, dan is $\frac{t_1}{n} > \frac{t_2}{n}$.

B_2 $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$

B_3 Als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (a ond. ond. b), dan is $c = k \times a$, $b = k \times b$.

B_4 $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a + b}{n}$

B_5 $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n}$

B_6 $n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b} = \frac{a}{b : n}$

B_7 $\frac{a}{b} : n = \frac{a : n}{b} = \frac{a}{n \times b}$

B_8 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

B_9 $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$

B_{10} $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b}$

B_{11} Een onvereenvoudigbare breuk is dan en dan alleen te herleiden tot een tiendelige breuk, als de noemer geen andere factoren dan 2 en/of 5 bevat.

B_{12} De periode van een zuiver repeterende breuk is gelijk aan de periode van 10 modulo n; n is de noemer van de voortbrengende breuk.

Rekenkundige rij:

$$t_n = a + (n - 1) \cdot v; \quad S_n = \tfrac{1}{2}n \cdot (a + l)$$

Meetkundige rij:

$$t_n = a \cdot r^{n-1}; \; S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, \text{ als } r > 1$$

$$S_n = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}, \text{ als } r < 1.$$

Als $r < 1$, dan is $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a}{1 - r}$.

Som van de delers van $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ (a, b en c priem):

$$S(n) = \frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}.$$

Volkomen getal: $(2^{p+1} - 1) \cdot 2^p$, als $2^{p+1} - 1$ een priemgetal is.

Breuk $\dfrac{t}{n}$ (t ond. ond. n) repeteert als zuiver repeterende breuk, als n geen factoren 2 en/of 5 bevat.

$\overline{0,\dot{a}bc\dot{d}}$ geeft bij herleiding $\dfrac{\overline{abcd}}{9999}$.

Breuk $\dfrac{t}{n}$ (t ond. ond. n) repeteert als gemengd repeterende breuk, als de noemer niet uitsluitend factoren 2 en/of 5 bevat.

$\overline{0,a\dot{b}cd\dot{e}}$ geeft bij herleiding $\dfrac{\overline{abcde} - \overline{ab}}{99900}$.

Vh_1 $a : b = ka : kb$

Vh_2 $a : b = (a : k) : (b : k)$

Vh_3 $(a : b) : k = (a : k) : b = a : (k \times b)$

Vh_4 $(a : b)^n = a^n : b^n$

Vh_5 $\sqrt[n]{(a : b)} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

E_1 Uit $a : b = c : d$ volgt $ad = bc$.

E_2 Als men de termen van een evenredigheid zo rangschikt, dat de uiterste termen van de gegeven evenredigheid allebei uiterste termen blijven of middelste termen worden, ontstaat een evenredigheid.

E_3 Uit $a : b = c : d$ volgt $k \cdot a : k \cdot b = c : d$.

E_4 Uit $a : b = c : d$ volgt $k \cdot a : b = k \cdot c : d$.

E_5 Uit $a : b = c : d$ volgt $a : k \cdot b = c : k \cdot d$.

E_6 Uit $a : b = c : d$ volgt $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$.

E_7 Uit $a : b = c : d$ volgt $(a \pm c) : (b \pm d) =$
$= a : b = c : d$.

E_8 Uit $a : b = c : d$ volgt $a^n : b^n = c^n : d^n$.

E_9 Uit $a : b = c : d$ volgt $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

E_{10} De produkten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een evenredigheid.

E11 De quotiënten van de overeenkomstige termen van twee evenredigheden vormen een evenredigheid.

I1 $\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)$, als $n = a^p b^q c^r$ (a, b en c priem).

I2 $\varphi(a^p \cdot b^q) = \varphi(a^p) \cdot \varphi(b^q)$

I3 Heeft een getal n als delers $d_1, d_2, d_3, \ldots, n$, dan is $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \varphi(d_3) + \ldots + \varphi(d_n) = n$.

C1 Uit $a \equiv b \pmod{m}$ volgt $a - b \equiv 0 \pmod{m}$.

C2 Uit $a \equiv b \pmod{m}$ volgt $n \cdot a \equiv n \cdot b \pmod{m}$.

C3 Uit $a \equiv b \pmod{m}$ volgt $a : k \equiv b : k \pmod{m}$, als k een deler is van a en b die ond. ond. is met m.

C4 Uit $a \equiv b \pmod{m}$ volgt $a : k \equiv b : k \pmod{m : k}$, als k een deler is van a, b en m.

Uit $a \equiv b \pmod{m}$ en $c \equiv d \pmod{m}$ volgt:

C5 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

C6 $a - c \equiv b - d \pmod{m}$

C7 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$

C8 $a : c \equiv b : d \pmod{m}$, als c ond. ond.i s met m.

C9 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ (a ond. ond. m)

C10 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ($p$ is priem, a geen p-voud)

C11 Als $a^d \equiv 1 \pmod{p}$, dan is d een deler van $p - 1$. (p is priem, $d < p$, a is geen p-voud)

C12 Onder de wortels van $x^d \equiv 1 \pmod{p}$, (p is priem), zijn $\varphi(d)$ wortels met de periode d.

C13 De congruentie $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (p is priem) heeft $p-1$ primitieve wortels.

C14 Als $g_1 \equiv g_2 \pmod{p}$, dan is ${}^a\text{ind}\, g_1 \equiv {}^a\text{ind}\, g_2 \pmod{p-1}$.

C15 ${}^a\text{ind}\, g_1 g_2 \equiv {}^a\text{ind}\, g_1 + {}^a\text{ind}\, g_2 \pmod{p-1}$

C16 ${}^a\text{ind}\, 1 \equiv 0 \pmod{p-1}$

C17 Als $g_1 g_2 \equiv 1 \pmod{p}$, dan is ${}^a\text{ind}\, g_1 + {}^a\text{ind}\, g_2 \equiv 0 \pmod{p-1}$.

C18 ${}^a\text{ind}\, g^n \equiv n \cdot {}^a\text{ind}\, g \pmod{p-1}$

C19 ${}^a\text{ind}\, b \cdot {}^b\text{ind}\, a \equiv 1 \pmod{p-1}$

C20 $(p - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (p is een priemgetal)

C21 Het getal a is een kwadraatrest als $a^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1 \equiv 0$ is, en een niet-rest als $a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ is.

C22 $\left(\frac{g_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{g_2}{p}\right) = \frac{g_1 g_2}{p}$

C_{23} $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1) \cdot \frac{1}{2}(q-1)}$ (p en q priem)

Mo_1 $|a,b| = |a| \cdot |b|$

Mo_2 $|a + b| = |a| + |b|$, als ab positief is.

Mo_3 $|a + b| = |a| - |b|$, als ab negatief is en $|a| > |b|$;
$|a + b| = |b| - |a|$, als ab negatief is en $|a| < |b|$.

R_1 De som van een meetbaar en een onmeetbaar getal is een onmeetbaar getal.

R_2 Het verschil van een meetbaar en een onmeetbaar getal is een onmeetbaar getal.

R_3 Het produkt van een meetbaar en een onmeetbaar getal is een onmeetbaar getal.

R_4 Het quotiënt van een meetbaar en een onmeetbaar getal is een onmeetbaar getal.

R_5 Een naar boven begrensde niet-lege getallenverzameling heeft een bovenste grens.

R_6 Een naar onderen begrensde niet-lege getallenverzameling heeft een onderste grens.

Permutaties:

$$P_n = n!$$

Variaties

$$V_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinaties

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)}{p!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Tabel I. Machten van en wortels uit *n*

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1	1
2	4	8	1,41421	1,25992
3	9	27	1,73205	1,44225
4	16	64	2	1,58740
5	25	125	2,23607	1,70998
6	36	216	2,44949	1,81712
7	49	343	2,64575	1,91293
8	64	512	2,82843	2
9	81	729	3	2,08008
10	100	1000	3,16228	2,15443
11	121	1331	3,31662	2,22398
12	144	1728	3,46410	2,28943
13	169	2197	3,60555	2,35133
14	196	2744	3,74166	2,41014
15	225	3375	3,87298	2,46621
16	256	4096	4	2,51984
17	289	4913	4,12311	2,57128
18	324	5832	4,24264	2,62074
19	361	6859	4,35890	2,66840
20	400	8000	4,47214	2,71442
21	441	9261	4,58258	2,75892
22	484	10648	4,69042	2,80204
23	529	12167	4,79583	2,84387
24	576	13824	4,89898	2,88450
25	625	15625	5	2,92402
26	676	17576	5,09902	2,96250
27	729	19683	5,19615	3
28	784	21952	5,29150	3,03659
29	841	24389	5,38516	3,07232
30	900	27000	5,47723	3,10723
31	961	29791	5,56776	3,14138
32	1024	32768	5,65685	3,17480
33	1089	35937	5,74456	3,20753
34	1156	39304	5,83095	3,23961
35	1225	42875	5,91608	3,27107
36	1296	46656	6	3,30193
37	1369	50653	6,08276	3,33222

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
38	1444	54872	6,16441	3,36198
39	1521	59319	6,24500	3,39121
40	1600	64000	6,32456	3,41995
41	1681	68921	6,40312	3,44822
42	1764	74088	6,48074	3,47603
43	1849	79507	6,55744	3,50340
44	1936	85184	6,63325	3,53035
45	2025	91125	6,70820	3,55689
46	2116	97336	6,78233	3,58305
47	2209	103823	6,85565	3,60883
48	2304	110592	6,92820	3,63424
49	2401	117649	7	3,65931
50	2500	125000	7,07107	3,68403
51	2601	132651	7,14143	3,70843
52	2704	140608	7,21110	3,73251
53	2809	148877	7,28011	3,75629
54	2916	157464	7,34847	3,77976
55	3025	166375	7,41620	3,80295
56	3136	175616	7,48331	3,82586
57	3249	185193	7,54983	3,84850
58	3364	195112	7,61577	3,87088
59	3481	205379	7,68115	3,89300
60	3600	216000	7,74597	3,91487
61	3721	226981	7,81025	3,93650
62	3844	238328	7,87401	3,95789
63	3969	250047	7,93725	3,97906
64	4096	262144	8	4
65	4225	274625	8,06226	4,02073
66	4356	287496	8,12404	4,04124
67	4489	300763	8,18535	4,06155
68	4624	314432	8,24621	4,08166
69	4761	328509	8,30662	4,10157
70	4900	343000	8,36660	4,12129
71	5041	357911	8,42615	4,14082
72	5184	373248	8,48528	4,16017
73	5329	389017	8,54400	4,17934
74	5476	405224	8,60233	4,19834
75	5625	421875	8,66025	4,21716

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
76	5776	438976	8,71780	4,23582
77	5929	456533	8,77496	4,25432
78	6084	474552	8,83176	4,27266
79	6241	493039	8,88819	4,29084
80	6400	512000	8,94427	4,30887
81	6561	531441	9	4,32675
82	6724	551368	9,05539	4,34448
83	6889	571787	9,11043	4,36207
84	7056	592704	9,16515	4,37952
85	7225	614125	9,21954	4,39683
86	7396	636056	9,27362	4,41400
87	7569	658503	9,32738	4,43105
88	7744	681472	9,38083	4,44796
89	7921	704969	9,43398	4,46475
90	8100	729000	9,48683	4,48140
91	8281	753571	9,53939	4,49794
92	8464	778688	9,59166	4,51436
93	8649	804357	9,64365	4,53065
94	8836	830584	9,69536	4,54684
95	9025	857375	9,74679	4,56290
96	9216	884736	9,79796	4,57886
97	9409	912673	9,84886	4,59470
98	9604	941192	9,89949	4,61044
99	9801	970299	9,94987	4,62607
100	10000	1000000	10	4,64159

Tabel II. Ontbinding in factoren van deelbare getallen t/m 1477 die geen factor 2, 3 of 5 bevatten

$49 = 7^2$	$187 = 11 \cdot 17$	$299 = 13 \cdot 23$
$77 = 7 \cdot 11$	$203 = 7 \cdot 29$	$301 = 7 \cdot 43$
$91 = 7 \cdot 13$	$217 = 7 \cdot 31$	$319 = 11 \cdot 29$
$119 = 7 \cdot 17$	$221 = 13 \cdot 17$	$323 = 17 \cdot 19$
$121 = 11^2$	$247 = 13 \cdot 19$	$329 = 7 \cdot 47$
$133 = 7 \cdot 19$	$253 = 11 \cdot 23$	$341 = 11 \cdot 31$
$143 = 11 \cdot 13$	$259 = 7 \cdot 37$	$343 = 7^3$
$161 = 7 \cdot 23$	$287 = 7 \cdot 41$	$361 = 19^2$
$169 = 13^2$	$289 = 17^2$	$371 = 7 \cdot 53$

$377 = 13 \cdot 29$
$391 = 17 \cdot 23$
$403 = 13 \cdot 31$
$407 = 11 \cdot 37$
$413 = 7 \cdot 59$
$427 = 7 \cdot 61$
$437 = 19 \cdot 23$
$451 = 11 \cdot 41$
$469 = 7 \cdot 67$
$473 = 11 \cdot 43$
$481 = 13 \cdot 37$
$493 = 17 \cdot 29$
$497 = 7 \cdot 71$
$511 = 7 \cdot 73$
$517 = 11 \cdot 47$
$527 = 17 \cdot 31$
$529 = 23^2$
$533 = 13 \cdot 41$
$539 = 72 \cdot 11$
$551 = 19 \cdot 29$
$553 = 7 \cdot 79$
$559 = 13 \cdot 43$
$581 = 7 \cdot 83$
$589 = 19 . 31$
$611 = 13 \cdot 47$
$623 = 7 \cdot 89$
$629 = 17 \cdot 37$
$637 = 7^2 \cdot 13$
$649 = 11 \cdot 59$
$667 = 23 . 29$
$671 = 11 \cdot 61$
$679 = 7 \cdot 97$
$689 = 13 \cdot 53$
$697 = 17 \cdot 41$
$703 = 19 \cdot 37$
$707 = 7 \cdot 101$
$713 = 23 \cdot 31$
$721 = 7 \cdot 103$
$731 = 17 \cdot 43$
$737 = 11 \cdot 67$
$749 = 7 \cdot 107$
$763 = 7 \cdot 109$
$767 = 13 \cdot 59$
$781 = 11 \cdot 71$
$791 = 7 \cdot 113$
$793 = 13 \cdot 61$
$799 = 17 \cdot 47$
$803 = 11 \cdot 73$
$817 = 19 \cdot 43$
$833 = 7^2 \cdot 17$
$841 = 29^2$
$847 = 7 \cdot 11^2$
$851 = 23 \cdot 37$
$869 = 11 \cdot 79$
$871 = 13 \cdot 67$
$889 = 7 \cdot 127$
$893 = 19 \cdot 47$
$899 = 29 \cdot 31$
$901 = 17 \cdot 53$
$913 = 11 \cdot 83$
$917 = 7 \cdot 131$
$923 = 13 \cdot 71$
$931 = 7^2 \cdot 19$
$943 = 23 \cdot 41$
$949 = 13 \cdot 73$
$959 = 7 \cdot 137$
$961 = 13^2$
$973 = 7 \cdot 139$
$979 = 11 \cdot 89$
$989 = 23 \cdot 43$
$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
$1003 = 17 \cdot 59$
$1007 = 19 \cdot 53$
$1027 = 13 \cdot 79$
$1037 = 17 \cdot 61$
$1043 = 7 \cdot 149$
$1057 = 7 \cdot 151$
$1067 = 11 \cdot 97$
$1073 = 29 \cdot 37$
$1079 = 13 \cdot 83$
$1081 = 23 \cdot 47$
$1099 = 7 \cdot 157$
$1111 = 11 \cdot 101$
$1121 = 19 \cdot 59$
$1127 = 7^2 \cdot 23$
$1133 = 11 \cdot 103$
$1139 = 17 \cdot 67$
$1141 = 7 \cdot 163$
$1147 = 31 \cdot 37$
$1157 = 13 \cdot 89$
$1159 = 19 \cdot 61$
$1169 = 7 \cdot 167$
$1177 = 11 \cdot 107$
$1183 = 7 \cdot 13^2$
$1189 = 29 \cdot 41$
$1199 = 11 \cdot 109$
$1207 = 17 \cdot 71$
$1211 = 7 \cdot 173$
$1219 = 23 \cdot 53$
$1241 = 17 \cdot 73$
$1243 = 11 \cdot 113$
$1247 = 29 \cdot 43$
$1253 = 7 \cdot 179$
$1261 = 13 \cdot 97$
$1267 = 7 \cdot 181$
$1271 = 31 \cdot 41$
$1309 = 7 \cdot 11 \cdot 17$
$1313 = 13 \cdot 101$
$1331 = 11^3$
$1333 = 31 \cdot 43$
$1337 = 7 \cdot 191$
$1339 = 13 \cdot 103$
$1343 = 17 \cdot 79$
$1351 = 7 \cdot 193$
$1357 = 23 \cdot 59$
$1363 = 29 \cdot 47$
$1369 = 37^2$
$1379 = 7 \cdot 197$
$1387 = 19 \cdot 73$
$1391 = 13 \cdot 107$
$1393 = 7 \cdot 199$
$1397 = 11 \cdot 127$
$1403 = 23 \cdot 61$

1411 = $17 \cdot 83$	1441 = $11 \cdot 131$	1469 = $13 \cdot 113$
1417 = $13 \cdot 109$	1457 = $31 \cdot 47$	1477 = $7 \cdot 211$
1421 = $7^2 \cdot 29$	1463 = $7 \cdot 11 \cdot 19$	

Tabel III. Priemgetallen t/m 4999

2	149	347	563	773	1019	1259	1499	1753
3	51	49	69	87	21	77	1511	59
5	57	53	71	97	31	79	23	77
7	63	59	77	809	33	83	31	83
11	67	67	87	11	39	89	43	87
13	73	73	93	21	49	91	49	89
17	79	79	99	23	51	97	53	1801
19	81	83	601	27	61	1301	59	11
23	91	89	07	29	63	03	67	23
29	93	97	13	39	69	07	71	31
31	97	401	17	53	87	19	79	47
37	99	09	19	57	91	21	83	61
41	211	19	31	59	93	27	97	67
43	23	21	41	63	97	61	1601	71
47	27	31	43	77	1103	67	07	73
53	29	33	47	81	09	73	09	77
59	33	39	53	83	17	81	13	79
61	39	43	59	87	23	99	19	89
67	41	49	61	907	29	1409	21	1901
71	51	57	73	11	51	23	27	07
73	57	61	77	19	53	27	37	13
79	63	63	83	29	63	29	57	31
83	69	67	91	37	71	33	63	33
89	71	79	701	41	81	39	67	49
97	77	87	09	47	87	47	69	51
101	81	91	19	53	93	51	93	73
03	83	99	27	67	1201	53	97	79
07	93	503	33	71	13	59	99	87
09	307	09	39	77	17	71	1709	93
13	11	21	43	83	23	81	21	97
27	13	23	51	91	29	83	23	99
31	17	41	57	97	31	87	33	2003
37	31	47	61	1009	37	89	41	11
39	37	57	69	13	49	93	47	17

2027	2347	2683	2999	3343	3671	4007	4349
29	51	87	3001	47	73	13	57
39	57	89	11	59	77	19	63
53	71	93	19	61	91	21	73
63	77	99	23	71	97	27	91
69	81	2707	37	73	3701	49	97
81	83	11	41	89	09	51	4409
83	89	13	49	91	19	57	21
87	93	19	61	3407	27	73	23
89	99	29	67	13	33	79	41
99	2411	31	79	33	39	91	47
2111	17	41	83	49	61	93	51
13	23	49	89	57	67	99	57
29	37	53	3109	61	69	4111	63
31	41	67	19	63	79	27	81
37	47	77	21	67	93	29	83
41	59	89	37	69	97	33	93
43	67	91	63	91	3803	39	4507
53	73	97	67	99	21	53	13
61	77	2801	69	3511	23	57	17
79	2503	03	81	17	33	59	19
2203	21	19	87	27	47	77	23
07	31	33	91	29	51	4201	47
13	39	37	3203	33	53	11	49
21	43	43	09	39	63	17	61
37	49	51	17	41	77	19	67
39	51	57	21	47	81	29	83
43	57	61	29	57	89	31	91
51	79	79	51	59	3907	41	97
67	91	87	53	71	11	43	4603
69	93	97	57	81	17	53	21
73	2609	2903	59	83	19	59	37
81	17	09	71	93	23	61	39
87	21	17	99	3607	29	71	43
93	33	27	3301	13	31	73	49
97	47	39	07	17	43	83	51
2309	57	53	13	23	47	89	57
11	59	57	19	31	67	97	63
33	63	63	23	37	89	4327	73
39	71	69	29	43	4001	37	79
41	77	71	31	59	03	39	91

4703	4751	4793	4831	4903	4937	4969
21	59	99	61	09	43	73
23	83	4801	71	19	51	87
29	87	13	77	31	57	39
33	89	17	89	33	67	99

Tabel IV. Aantal repeterende cijfers *A* bij de noemer *n*
(grondtal 10)

n	*A*	*n*	*A*	*n*	*A*	*n*	*A*
3	1	57	18	109	108	161	66
7	6	59	58	111	3	163	81
9	1	61	60	113	112	167	166
11	2	63	6	117	6	169	78
13	6	67	33	119	48	171	18
17	16	69	22	121	22	173	43
19	18	71	35	123	5	177	58
21	6	73	8	127	42	179	178
23	22	77	6	129	21	181	180
27	3	79	13	131	130	183	60
29	28	81	9	133	18	187	16
31	15	83	41	137	8	189	6
33	2	87	28	139	46	191	95
37	3	89	44	141	46	193	192
39	6	91	6	143	6	197	98
41	5	93	15	147	42	199	99
43	21	97	96	149	148		
47	46	99	2	151	75		
49	42	101	4	153	16		
51	16	103	34	157	78		
53	13	107	53	159	13		

Tabel V. Lijst van priemgetallen met de kleinste primitieve wortel

getal	primitieve wortel	getal	primitieve wortel
3	2	43	3
5	2	47	5
7	3	53	2
11	2	59	2
13	2	61	2
17	3	67	2
19	2	71	7
23	5	73	5
29	2	79	3
31	3	83	2
37	2	89	3
41	6	97	5

Tabel VI. Priemgetallen van Mersenne (2^m-1)

$2^{2}-1$	=	3
$2^{3}-1$	=	7
$2^{5}-1$	=	31
$2^{7}-1$	=	127
$2^{13}-1$	=	8191
$2^{17}-1$	=	131071
$2^{19}-1$	=	524287
$2^{31}-1$	=	2147483647
$2^{61}-1$	=	2305843009213693951
$2^{89}-1$	=	618970019642690137449562111
$2^{107}-1$	=	162259276829213363391578010288127
$2^{127}-1$	=	170141183460469231731687303715884105727

BIBLIOGRAFIE

PROF. FRED SCHUH, *Leerboek der theoretische rekenkunde I*, Groningen, 1919.

PROF. FRED SCHUH, *Leerboek der elementaire theoretische rekenkunde II*, Groningen, 1919.

P. WIJDENES, *Beginselen v. d. getallenleer*, Groningen, 1937.

DR. B. P. HAALMEIJER en J. H. SCHOGT, *Inleiding tot de leer der verzamelingen*, Groningen, 1927.

P. WIJDENES, *Middel Algebra*, dl. I, Groningen, 1943.

P. WIJDENES, *Middel Algebra*, dl. II, Groningen, 1943.

IR. F. HARKINK, *Inleiding tot het praktisch rekenen*, Groningen.

A. O. GELFOND, *The solution of equations in integers*, (vertaald uit het Russisch), Groningen.

PROF. DR. ALBERT GLODEN, *Mehrgradige Gleichungen*, Groningen.

DR. J. POPKEN, *Over het rekenkundig karakter van getallen*, Groningen.

DR. C. VISSER, *De leer der getallen*, Groningen.

DR. F. SCHUH, *Axiomatische behandeling der meetbare en onmeetbare verhoudingen van grootheden*, Groningen, 1929.

DR. L. N. H. BUNT, *Van Ahmes tot Euclides*, Groningen.

DR. F. SCHUH, *Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal*, Groningen, 1927.

DR. G. SCHOUTEN, *De grondslagen der rekenkunde*, Groningen, 1927.

DR. C. H. VAN OS, *Getal en Kosmos*, A'dam, 1947.

B. L. V. D. WAERDEN, *Ontwakende Wetenschap*, Groningen, 1950.

REGISTER

De cijfers verwijzen naar paragraafnummers

aaneengeschakelde evenredigheid 183
aantal 5
– delers van een getal 96
– primitieve wortels 193
aantallen 206, 229
absolute waarde 211
accolade 67
afgeleide eigenschappen 10, 69, 139, 147, 207
afronding 233
aftrekker 14, 140
aftrekking 14, 78, 140
aftrektal 14, 140

algoritme
– van de aftrekking 78
– van de deling 80
– van Euclides 100
– van de optelling 77
– van de vermenigvuldiging 79, 230
– van de worteltrekking 82
anti-indextafel 195
Archimedes 184
associatieve eigenschap
– van de optelling 9, 138, 200, 203, 216
– van de vermenigvuldiging 26, 28, 144, 200
benaderde waarden 233
betrekkelijke fout 233
betrekkelijke waarde 72
betrekkingswijzer 184
biljoen 72
bovenste grens 228
breuken 131, 215
decimale – 152
echte – 132
eigenlijke – 132
enkelvoudige – 132
gelijknamige – 132
ketting– 184
onechte – 132
oneigenlijke – 132
ongelijknamige – 132
repeterende – 165
samengestelde – 132
tiendelige – 152, 153
combinaties 237
commutatieve eigenschap
– van de optelling 8, 12, 138, 200, 203, 216
– van de vermenigvuldiging 25, 27, 144, 200, 203, 216
complementaire delers 83
complexe getallen 229
congruentie 185
– van Euler 189
– van Fermat 189
lineaire – 186
decimaalteken 152
decimale breuk 152
Dedekind 219
deelbaar 83
deelbaar getal 84
deelbaarheid 83
eigenschappen van de – 85
kenmerken van – 118
deeltal 31
deler 83
delers
aantal – van een getal 96
complementaire – 83
echte – 83
gemene – 85
produkt van de – 97
som van de – 162
deling 31, 142
niet-opgaande – 42, 80
opgaande – 42, 80
distributieve eigenschap
– van de machtsverheffing 45, 47
– van de vermenigvuldiging 29, 144, 200
– van de worteltrekking 54, 56
echte breuk 132
echte delers 83
één-één-correspondentie 4
eenheden 71
– van de laatste decimaal 233
eigenlijke breuk 132
element
– van een hoeveelheid 5
– van een verzameling 4
elfproef 126
Eratosthenes 93
Euclides 91
algoritme van – 100
Euler 92
congruentie van – 189
kenmerk van 196
methode van – 170
stelling van – 189
even 83
evenredig
omgekeerd – 183

recht – 183
evenredigheid 174
aaneengeschakelde – 183
hoofdeigenschap van de – 176
termen van een – 174
exponent 44
factoren 22
faculteit 91, 235
Fermat 92
congruentie van – 189
stelling van – 189
fout 233
fundamenteel-eigenschap 94
Gauss
stelling van – 112, 193
gebroken getallen 131, 215
gedeeltelijke produkten 79
gedurige som 7
gehele getallen 68
gelijk 3
gelijknamige breuk 132
gelijknamige macht 44
gelijknamige wortel 53
gelijksoortige logaritme 61
gelijksoortige macht 44
gemeen veelvoud 113
gemene deler 85
gemengde getallen 132
gemengd repeterende breuk 165, 194
gemiddelde 158
gereduceerd restsysteem 185
getal 5
gebroken – 131
geheel – 68
gemengd – 132
natuurlijk – 1
perfect – 163
volkomen – 163
getalklasse 187
getallenparen 201, 214
getalsoort 133, 199
grondeigenschappen 10, 69, 70, 139, 199, 226
grondtal 44, 52, 61, 71
grootste gemene deler 98
groter dan 3
g-tallig stelsel 74, 75
haken 67
hoeveelheid 5
hoge klasse 220
hoofdbewerkingen 77
hoofdeigenschap
– van de evenredigheden 176
– van de telling 5
hoofdrekenen 13
ilatieteken 71
imaginaire getallen 229
index 195
index-tafel 195
indicator van *n* 112
indices 195
inductie, bewijs door volledige – 121
irrationale snede 223
kans 238
kenmerk
– van deelbaarheid 118
– van Euler 196
kettingbreuken 184
klasse 220
kleiner dan 3
kleinste gemene veelvoud 113
kommabreuk 152
kwadraat 44
kwadraatgetal 96, 97
kwadraatrest 197
leeg 220
lege klasse 220
Legendre
reciprociteitsstelling van – 197
symbool van – 196
limiet 160
lineaire congruentie 187
logaritme 52
gelijksoortige – 61
logaritmeneming 52, 61, 150
macht 44
gelijknamige – 44
gelijksoortige – 44
machtsverheffing 44, 148
meetbaar getal 214

meetbare snede 222
meetkundige rij 159
oneindig voortlopende – 160
meetkundig middelevenredig 160
middelevenredig, meetkundig 161
–, rekenkundig 158
middelste termen van een evenredigheid 174
miljard 72
miljoen 72
modulus 185
– van een getal 211
moduluseigenschap
– van de optelling 69, 200, 203, 216
– van de vermenigvuldiging 24, 200, 203, 216
natuurlijke getallen 1
rij van de – 2
negatieve getallen 68, 205
negenproef 123
niet –
– associatief 51
– commutatief 44, 51
– leeg 220
– opgaande deling 42
– rest 196
nodig en voldoende 5, 95, 120
noemer 131
nul 68
nulhoeveelheid 68
omgekeerde 146
omgekeerde bewerkingen 66
omgekeerd evenredig 183
onbepaald 70, 132
onbepaalde vergelijking 188
onderling ondeelbaar 98
onderste grens 228
onechte breuk 132
oneigenlijke breuk 132
oneindig voortlopende meetkundige rij 160
oneven 83
ongelijk 3
ongelijknamige breuk 132
onmeetbaar getal 223
onmeetbare snede 223
onvereenvoudigbaar 137
opgaande deling 42
optelling 6, 77, 138
– van natuurlijke getallen 6
opvolgende getallen 89
partieel quotiënt 42
partiële vierkantswortel 82
periode
– van een breuk 165
– van een getal 192, 194
– van resten 128
perfect getal 163
permutaties 235
pi-notatie 184
positiestelsel 71
positieve gehele getallen 206
priem, relatief 98
priemfactoren 95
priemgetal 84, 90
primitieve wortels 190, 191, 193
produkt 22
– van de delers 97
gedeeltelijk – 79
gedurig – 23
gedurig – 23
Pythagoras 93
quadriljoen 72
quintiljoen 72
quotiënt 31
partieel – 42
radicandus 82
ranggetal 5
rangnummer 5
rationale getallen 214
rationale snede 222
rechtstreekse bewerkingen 66
reciprociteitsstelling van Legendre 197
reciproke 187
recht evenredig 183
reden 159, 174
reële getallen 227
rekenkundige bewerking 7

rekenkundige rij 156
rekenkundig middelevenredige 158
relatief priem 98
relatieve fout 233
repetendum 165
repeterende breuk 165
rest 196
– (bij deling) 42, 119
resten, periode van 128
restsysteem
gereduceerd – 185
volledig – 185
rij der getallen
– , afdalende 156
– , meetkundige 159
– , natuurlijke 2
– , oneindig voortlopende 160
– , opklimmende 156
– , rekenkundige 156
samengestelde breuk 132
sigma-notatie 237
snede van Dedekind 219
som 6
– van de delers van een getal 162
somverzameling 6
stambreuken 132
stelling
– van de bovenste grens 228
– van Euler 189
– van Fermat 189
– van Gauss 112
– de onderste grens 228
– van Wilson 196
symbool van Legendre 196
tafel
– van optelling 77
– van vermenigvuldiging 79
talstelsel 71
tegengestelde 206
tellen 2, 5
teller 2, 5
termen 6
– van een evenredigheid 174
– van een rij 156
– van de schaal 71
tiendelige breuk 152
tientallig stelsel 72
triljoen 72
tweetallig stelsel 73
uiterste termen van een evenredigheid 174
variaties 236
veelvoud 83
verdelingsdeling 31, 41
vereenvoudigen 137
verhouding 174
verhoudingsdeling 31, 41
verhoudingsgetallen 174
vermenigvuldigen 22
vermenigvuldiging 22, 79, 141
tafel van – 79
verschil 14
verzameling 4
vierkant van een getal 44
vierkantswortel 82
partiële – 82
volgende termen 174
volgorde van de bewerkingen 67
volkomen getal 163
volledige inductie, bewijs door 121
volledig restsysteem 185
volstrekte fout 233
volstrekte waarde
– van een cijfer 72
– van een getal 211
voorgaande termen 174
voortbrengende breuk 165
waarde
betrekkelijke – 71
volstrekte – 71
werkelijke – 71
werkelijke waarde 71
wijzergetal 184
Wilson, stelling van 196
wortel 52, 186
gelijknamige – 52
worteltrekking 52, 82, 149
zeef van Eratosthenes 93
zuiver repeterende breuk 165

6703.1

PRISMA-COMPENDIA
het pocketboek voor studie en praktijk

C 1 **Algemene muziekleer** *Theo Willemze*
Alles wat voor de praktische muziekbeoefening aan kennis vereist is. Een volledige behandeling van elementaire zaken als notenschrift met de daarbij behorende sleutels, voortekens, versieringen en verdere aanduidingen; van de tempi met hun uitgebreide terminologie; van de toonladders met de vaste voortekens enz. Daarnaast wordt ook de theoretische kennis gegeven, die niet alleen belangrijk is voor het juist en met begrip uitvoeren van de muziek, maar die ook de grondslag is van alle verdere theoretische studie en het eerste materiaal ervoor levert. De intervallen en hun toepassing bij de akkoorden in verschillende ligging enz. Volledigheidshalve worden ook minder op de directe praktijk gerichte zaken behandeld, zoals de leer van geluid en timbre, de berekening van hertz en cents.

C 2 **Sterrenkunde** *Dr. W. J. A. Schouten*
Dit boek behandelt niet alleen de 'gewone' astronomie, dit is de bestudering van planeten- en sterrenbewegingen en de classificatie en verdeling van de sterren. Het behandelt tevens de jongste soms revolutionaire ontwikkelingen van de 'heelal'-astronomie, met haar fascinerende, maar veelomvattende problemen rond de bouw van het heelal, zijn ontstaan en ontwikkeling, en van het ontstaan en de evolutie der afzonderlijke sterren en melkwegstelsels. Dit is waarlijk een compendium, dat zowel een overzicht biedt van de hoofdzaken als een behoorlijk inzicht in de problemen en methoden.

Er zijn tientallen compendia in voorbereiding. Wilt u op de hoogte blijven van wat er regelmatig verschijnt in de Prisma-compendia, evenals in onze andere pocket-reeksen, geef uw naam en adres op aan

Prisma, postbus 2073, Utrecht of

Prisma, Schildersstraat 2, Antwerpen

PRISMA-COMPENDIA
het pocketboek voor studie en praktijk

Dirk Willem Oort, in 1917 geboren te Zijpe (N.H.), is zijn loopbaan begonnen als onderwijzer bij het lager en uitgebreid lager onderwijs, maar doceert thans wiskunde bij het middelbaar onderwijs en aan een kweekschool voor onderwijzers. Tevens is hij leraar aan de cursus ter opleiding voor akte wiskunde LO en lid van de examencommissie wiskunde. Van zijn hand verscheen o.a. een leerboek *(Planimetrie, gonio- en trigonometrie voor de kweekschool).*

Gerrit Hendrik Meijer is in 1927 te Amsterdam geboren. Hij doorliep de hbs en behaalde daarna de MO-akte wiskunde. Na een tijdlang werkzaam te zijn geweest bij het buitengewoon lager onderwijs (voor moeilijk opvoedbare jongens), doceert hij thans wiskunde aan de Gemeentelijke Kweekschool te Amsterdam.

2900050



